A GENERAL APPROACH TO IDENTIFICATION PROBLEMS AND APPLICATIONS
UN APPROCCIO GENERALE A PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE ED APPLICAZIONI

ANGELO FAVINI

Abstract. An abstract method for dealing with identification problems related to evolution equations with multivalued operators or linear relations is described. Some possible applications are given.

Sunto. Viene descritto un metodo astratto per trattare problemi di identificazione relativi ad equazioni di evoluzioni con operatori multivoci. Alcune applicazioni sono date.

2010 MSC. 35R30, 34610, 35K20, 45N05, 45Q05.

Keywords. Direct and Inverse Problems; First order equations in Banach spaces; linear parabolic differential equations; existence and uniqueness of solutions to inverse problems

All'inizio di questo ciclo di seminari di Analisi Matematica, voglio ricordare il professor Bruno Pini, che tanto ha dato nello sviluppo della ricerca in questa Università.

1. Introduzione

Molto recentemente sono stati studiati problemi di identificazione in spazi di Banach del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t)z_j + h(t), \quad 0 \le t \le r, \\ y(0) = y_0 \\ \Phi_j\left[y(t)\right] = g_j(t), \quad 0 \le t \le r, \end{cases}$$

nelle incognite $(y, f_1, \ldots, f_n) \in C\left([0,r]\,; D\left(A\right)\right) \times \prod_{j=1}^{n} C\left([0,r]\,; \mathbb{C}\right),\ h \in C\left([0,\tau]\,; X\right)$, sotto l'ipotesi che l'operatore lineare chiuso A in X soddisfi la stima risolvente di tipo

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2014) pp. 111–126

ISSN 2240-2829.

debolmente parabolico

$$\left|\left|(\lambda - A)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\left(1 + |\lambda|\right)^{-\beta}, \tag{2}$$

per ogni $\lambda \in \Sigma_\alpha : = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq -C\left(1 + |\Im m\lambda|\right)^\alpha\}$, dove $C > 0$, $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$.

Naturalmente gli $z_j \in X,\ j = 1, \ldots, n, y_0 \in D\left(A\right), \Phi_j \in X^*,\ g_j \in C\left([0, r]\,; \mathbb{C}\right)$ per $j = 1, \ldots, n.$ Vedi il lavoro [5].

Osserviamo che sebbene nel caso astratto $\alpha < 1$ è considerato, in tutti i problemi concreti considerati si trovava che $\alpha = 1$. Tuttavia, esempi di operatori A per cui $\alpha < 1$ si possono trovare: vedi equazioni di evoluzione ben posti secondo Shilov (cfr. la monografia di S.G. Krein [10], Chapter 1, Section 8). Ecco un esempio, la cui idea fondamentale viene da Yuli Eidelmann (Tel Aviv).

Prendiamo $X = L^2(R)$, $D(A) = H^3(R)$,

$$Au = u'' - u''' + \gamma u, \quad u \in D(A),$$

con $\gamma < 0$. Applicando la trasformata di Fourier, si vede che l'operatore "duale" $\hat{A}$ di A è definito da

$$\left(\hat{A}\hat{u}\right)(\sigma) = \left(-\sigma^2 + i\sigma^3 + \gamma\right)\hat{u}(\sigma).$$

Lo spettro di tale operatore è descritto dall'insieme di punti (x, y), $x = -\sigma^2 + \gamma$, $y = \sigma^3$. La norma del risolvente $(\lambda - A)^{-1}$ coincide con $\frac{1}{k(\lambda)}$, dove $k(\lambda)$ è la distanza di λ dalla curva sopra descritta.

Si vede direttamente che $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. A tale risultato si arriva anche nel modo seguente. Sia

$$\lambda u - u'' + u''' - \gamma u = f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Moltiplicando per $\bar{u}$ ed integrando su $\mathbb{R}$, si ha

$$\lambda\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}dx - \gamma\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int f\bar{u}dx. \tag{4}$$

Ora

$$\int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}dx = -\int_{\mathbb{R}} u''\bar{u}'dx = \int_{\mathbb{R}} u'\bar{u}''dx$$

e così
$$\Re e \int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}\ dx = 0.$$
Prendendo la parte reale di (4), si ottiene
$$\Re e\lambda\|u\|_X^2 + \|u'\|_X^2 - \gamma\|u\|_X^2 = \Re e \int_{\mathbb{R}} f\bar{u}\ dx.$$
Segue che se $\Re e\lambda \geq 0$
$$\|u\|_X \leq -\frac{1}{\gamma}\|f\|_X,$$
$$\|u'\|_X \leq C\|f\|_X.$$
Prendendo la parte immaginaria in (4),
$$\Im m\lambda\|u\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}} u''\bar{u}'dx = \Im m \int_{\mathbb{R}} f\bar{u}\ dx.$$
Abbiamo bisogno di stimare $\|u''\|_X$. Moltiplicando (3) per $-\bar{u}''$ ed integrando su $\mathbb{R}$, si trova
$$-\lambda\int_{\mathbb{R}} u\bar{u}''dx + \int_{\mathbb{R}} |u''|^2dx + \int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}''dx + \gamma\int_{\mathbb{R}} u\bar{u}''dx = -\int f\bar{u}''dx.$$
Si ottiene
$$\lambda\int_{\mathbb{R}} |u'|^2dx + \|u''\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}''dx - \gamma\int_{\mathbb{R}} |u'|^2dx = -\int_{\mathbb{R}} f\bar{u}''dx.$$
Poiché $\Re e \int_{\mathbb{R}} u'''\bar{u}''dx = 0$, si ha
$$\Re e\lambda\int_{\mathbb{R}} |u'|^2dx + \|u''\|_X^2 - \gamma\|u'\|_X^2 \leq \|f\|_X\|u\|_X.$$
Poiché $\Re e\lambda \geq 0$, è $\|u''\|_X \leq \|f\|_X$. Ma allora
$$|\Im m\lambda|\|u\|_X^2 \leq \|u''\|_X\|u'\|_X + \|f\|_X\|u\|_X \leq C\|f\|_X^2 + C'\|f\|_X^2.$$
Allora $\forall\lambda$ con $\Re e\lambda \geq 0$,
$$|\lambda|\|u\|_X^2 < C\|f\|_X^2,$$
da cui
$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1/2} \text{ per ogni } \Re\mathrm{e}\lambda \geq 0.$$
Così la stima parabolica è stabilita. Tuttavia, poiché $\alpha + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, i risultati di regolarità per la soluzione descritti in [1, 9, 2] (regolarità temporale) non possono essere

immediatamente applicati. A maggior ragione, problemi ulteriori si presentano se si vuole studiare il caso degenere, cioè

$$\frac{\partial}{\partial t}(mu) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u + f(t,x),$$

dove $m(x)$ è una funzione misurabile limitata e non negativa su $\mathbb{R}$.

In tal caso la proprietà parabolica non sembra tenere.

Introducendo l'operatore M di moltiplicazione per $m(x)$ e l'operatore L dato da $D(L) = H^3(\mathbb{R})$, $Lu = \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^3u}{dx^3} + \lambda u$, $u \in D(L)$, il problema evolutivo può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \left(M^{\frac{1}{2}}\right)^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M^{\frac{1}{2}}y\right) = Ly + f(t) \\ \left(M^{\frac{1}{2}}y\right)(0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

nello spazio hilbertiano. Naturalmente, qui X denota uno spazio di Hilbert (come $L^2(\mathbb{R})$), con prodotto interno $\langle , \rangle$. Si richiede (cfr. [9], p. 38)

$$\Re e\langle Ly, y\rangle \leq \beta \|My\|^2$$

per ogni $\lambda \in D(L)$ e un numero reale β, e

$$\Im m(\lambda_0 (M^*)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} - L) = X$$

per un certo $\lambda_0 > 0$; inoltre, $(\lambda_0 (M^*)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} - L)^{-1}$ è "single-valued" e limitato in X.

Nel caso in discussione

$$\langle Ly, y\rangle = \langle y'' - y''' + \gamma y, y\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\|y'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \int_{\mathbb{R}} y'''\bar{y}\ dx + \gamma \|y\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$\int y'''\bar{y}\ dx = -\int y''\bar{y}' dx,$$

cosicché

$$\Re e \int_{\mathbb{R}} y'''\bar{y}\ dx = 0.$$

Segue appunto

$$\Re e\langle Ly, y\rangle = -\|y'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \gamma \|y\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 0.$$

Quindi, possiamo prendere $\beta = 0$. D'altra parte, L è invertibile perché

$$\|(0-L)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(0,\Gamma)}$$

dove Γ è la curva parametrizzata da $x = -\sigma^2 + \gamma$, $y = \sigma^3$. Ma allora, se $0 < |\lambda_0|$ è piccolo, $\lambda_0 (M^*)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} - L$ è anch'esso invertibile.

Si possono applicare i risultati di esistenza e unicità della soluzione al problema (5), (6) di Favini e Yagi [9], p. 39, ma questi richiedono regolarità C^2 per la f, oppure $f = (M^{\frac{1}{2}})^* f_1$, $f_1 \in C^1$ e ciò non va bene se vogliamo risolvere un problema di identificazione. È mostrato in F.-Marinoschi [7] che, in effetti, minore regolarità per f_1 può essere assunta e ciò permette di risolvere relativi problemi di identificazione quando la parte non omogenea è del tipo $f(t) \cdot (M^*)^{\frac{1}{2}} z$. Si riesce cioè a identificare la coppia (y, f).

Il caso generale è più complicato ed è attualmente oggetto di ricerca.

In questo seminario si esporranno recentissimi risultati su problemi di identificazione relativi alla inclusione differenziale

$$u' - M\left(F(t), Z\right) - h(t) \in Au(t), \quad 0 \le t \le r,$$

e verranno descritte alcune applicazioni a problemi inversi per equazioni possibilmente degeneri. Le incognite sono u e F. Vedi [3, 4, 8, 5, 6].

2. Il problema inverso

Siano X, $\mathcal{F}$, $\mathcal{Z}$ tre spazi di Banach complessi con norma $||\cdot||$, $||\cdot||_{\mathcal{F}}$ e $||\cdot||_{\mathcal{Z}}$, rispettivamente. Faremo le seguenti assunzioni:

(H1) A è un operatore lineare multivoco in X e il suo risolvente

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \exists\, (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}$$

contiene l'insieme $\Sigma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \ge -C_0(1 + |\Im m\lambda|)^\alpha\}$, dove $C_0 > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$.

(H2) $\left|\left|(\lambda - A)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(X)} \le C\left(1 + |\lambda|\right)^{-\beta}$, $\lambda \in \Sigma_\alpha$, dove $C > 0$ e $0 < \beta \in (0, \alpha]$.

(H3) $M \in B\left(\mathcal{F} \times \mathcal{Z}, X\right)$, dove $B\left(\mathcal{F} \times \mathcal{Z}, X\right)$ denota lo spazio di Banach degli operatori bilineari limitati da $\mathcal{F} \times \mathcal{Z}$ in X.

(H4) $\Phi \in \mathcal{L}\left(X, \mathcal{F}\right)$.

(H5) Per ogni fissato $Z \in \mathcal{Z}$ e ogni $H \in \mathcal{F}$ l'equazione

$$\Phi\left[M\left(F, Z\right)\right] = H$$

è univocamente risolubile in $\mathcal{F}$ e la sua soluzione può essere rappresentata da

$$F = \Psi\left[H, Z\right],$$

dove l'operatore (nonlineare) $\Psi\colon D\left(\Psi\right) \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$ è lineare e continuo come funzione di H:

$$\left|\left|\Psi\left[H, Z\right]\right|\right|_{\mathcal{F}} \leq C_1(Z)\left|\left|H\right|\right|_{\mathcal{F}} \text{ per ogni } H \in \mathcal{F}.$$

(H6) Esistono spazi di Banach X_A^θ e $\mathcal{Z}^\theta$, immersi con continuità in X e Z, rispettivamente, tali che

$$\left|\left|M\left[F, Z\right]\right|\right|_{X_A^\theta} \leq \mathbb{C}(\theta)\left|\left|F\right|\right|_{\mathcal{F}}\left|\left|Z\right|\right|_{\mathcal{Z}^\theta}.$$

X_A^θ è infatti lo spazio

$$X_A^\theta\colon = \left\{x \in X; \sup_{t \geq t_0 > 0} t^\theta \left|\left|A^0\left(t - A\right)^{-1} x\right|\right|_X < \infty\right\},$$

dove t_0 è un fissato numero positivo, $0 < \theta < 1$, e

$$A^0\left(t - A\right)^{-1} = -I + t\left(t - A\right)^{-1}.$$

Consideriamo allora il seguente problema di identificazione: trovare una coppia di funzioni $u\colon [0, \tau] \to X, F\colon [0, \tau] \to \mathcal{F}$, tali che

$$\begin{cases} u'(t) - M\left(F(t), Z\right) - g(t) \in Au(t), \quad t \in \left[0, \tau\right], \\ u(0) = u_0, \\ \Phi\left[u(t)\right] = H(t), \end{cases} \tag{6}$$

dove $u_0 \in D(A)$, $g \in C([0, \tau]; X)$, $H \in C^1([0, \tau]; \mathcal{F})$.

Abbiamo allora il seguente risultato.

Teorema 2.1. *Supponiamo che A soddisfi (H1), (H2) e che valgano (H3)∼(H6) insieme a $\Phi[u_0] = H(0)$, $2\alpha + \beta > 2$, $2\alpha + \beta + \theta > 3$, $Z \in \mathcal{Z}^\theta$, $u_0 \in D(A)$, $Au_0 \cap X_A^\theta \neq \emptyset$, $g \in C\left([0, \tau]; X\right) \cap B\left([0, \tau]; X_A^\theta\right)$, $H \in C^1\left([0, \tau]; \mathcal{F}\right)$.*

Allora il problema (6) ammette una unica soluzione (u, F) *tale che* $u \in C^1([0,\tau];X)$, $F \in C([0,\tau];\mathcal{F})$ *e*

$$u' - M[F(\cdot), Z] - g \in C^{\frac{2\alpha+\beta+\theta-3}{\alpha}}(0,\tau;X) \cap B\left([0,\tau];X_A^{\frac{2\alpha+\beta+\theta-3}{\alpha}}\right).$$

$B([0,\tau];Y)$, Y spazio di Banach, denota lo spazio delle funzioni limitate da $[0,\tau]$ in Y, con la norma del sup.

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che deve valere

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} M[F(s), Z]\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s,$$

e $\Phi[u(t)] = H(t)$.

Segue che

$$H(t) = \Phi\left[e^{tA}u_0\right] + \Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} M[F(s), Z]\,\mathrm{d}s\right] + \Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s\right].$$

Differenziando entrambi i membri dell'equazione sopra, otteniamo

$$H'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left[e^{tA}u_0\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} M[F(s), Z]\,\mathrm{d}s\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s\right].$$

Allora

$$\begin{aligned} \Phi[M(F(t), Z)] = \ & H'(t) - \Phi\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}u_0\right] + \\ & -\Phi\left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A} M[F(s), Z]\,\mathrm{d}s\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

In virtù di (H5), la precedente relazione si legge

$$\begin{aligned} F(t) = \Psi[H'(t), Z] &- \Psi\left[\Phi\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}u_0\right], Z\right] \\ &- \Psi\left[\Phi\left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A} M(F(s), Z)\,\mathrm{d}s\right], Z\right] \\ &- \Psi\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left[\int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\right], Z\right]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Inoltre, usando sia (H5) che (H6), possiamo stimare

$$\begin{aligned} ||F(t)||_{\mathcal{F}} \le C_1(Z)\,||H'(t)||_{\mathcal{F}} + C_1(Z)\left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}u_0\right|\right|_X ||\Phi||_{\mathcal{L}(X,\mathcal{F})} \\ + C_1(Z)\left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s\right|\right|_{\mathcal{F}} + C_1(Z)\left|\left|\int_0^t \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}\right) M(F(s), Z)\mathrm{d}s\right|\right|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\left|\left|\Psi\left[\int_0^t \Phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{(t-s)A}\right)M\left(F(s),Z\right)\mathrm{d}s, Z\right]\right|\right|_{\mathcal{F}} \leq$$

$$\leq C(Z)\left|\left|\int_0^t \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}\right)M\left(F(s),Z\right)\mathrm{d}s\right|\right|_{\mathcal{F}} \leq$$

$$\leq C(Z)\int_0^t \left|\left|\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}\right)M\left(F(s),Z\right)\right|\right|_{\mathcal{F}} \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq C'(Z)\int_0^t \left|\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}M\left(F(s),Z\right)\right|\right|_{X} \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq C'(Z)\int_0^t \left|\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}\right|\right|_{\mathcal{L}\left((X,D(A))_{\theta,\infty},X\right)} ||M(F(s),Z)||_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq C''(Z)\int_0^t (t-s)^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}} \left|\left|M\left(F(s),Z\right)\right|\right|_{X_A^\theta} \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq C''(Z)C\int_0^t (t-s)^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}} \left|\left|F(s)\right|\right|_{\mathcal{F}} \left|\left|Z\right|\right|_{\mathcal{Z}^\theta} \mathrm{d}s.$$

Denotando con S l'operatore in $C\left([0,\tau],\mathcal{F}\right)$ dato da

$$SF(t) = -\Psi\left[\Phi\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{(t-s)A}M\left(F(s),Z\right)\mathrm{d}s, Z\right]$$

si è così ottenuto che

$$\left|\left|SF(t)\right|\right|_{\mathcal{F}} \leq C''(Z)C\left|\left|Z\right|\right|_{\mathcal{Z}^\theta}\int_0^t (t-s)^{-1+\theta_0}\left|\left|F(s)\right|\right|_{\mathcal{F}} \mathrm{d}s,$$

dove $\theta_0 = \frac{\theta-(2-\alpha-\beta)}{\alpha}$. Pertanto, ripetendo gli argomenti in [4], Corollary 3.3,

$$\left|\left|S^nF(t)\right|\right|_{\mathcal{F}} \leq \left[C''(Z)C\left|\left|Z\right|\right|_{\mathcal{Z}^\theta}\right]^n \frac{\Gamma(\theta_0)^n t^{\theta_0 n}}{\Gamma\left(n\theta_0\right)n\theta_0}\|F\|_{C([0,\tau];\mathcal{F})}.$$

Poiché $|\Gamma(n\theta_0)|^{\frac{1}{n}} \to +\infty$ per $n \to \infty$, concludiamo che l'operatore S ha raggio spettrale uguale a 0. Ricordiamo che deve essere $2\alpha+\beta > 2$, $3-2\alpha-\beta < \theta < 1$, $Au_0 \cap X_A^\theta \neq \emptyset$.

Per concludere la dimostrazione, basterà utilizzare il seguente risultato, che riportiamo come Lemma (cfr. [5]). □

Lemma 2.1. *Sia* $2\alpha+\beta>2$, $2\alpha+\beta+\theta>3$, $u_0\in D(A)$, $Au_0\cap(X,D(A))_{\theta,\infty}\neq\emptyset$, $f\in C([0,\tau];X)\cap B\left([0,\tau],(X,D(A))_{\theta,\infty}\right)$ *dove* A *soddisfa (H1),(H2). Allora il problema*

$$u'(t)-f(t)\in Au(t),\quad t\in[0,\tau],$$
$$u(0)=u_0,$$

ammette una unica soluzione u *tale che* $u\in C^1([0,\tau];X)$,

$$u'-f\in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,\tau];X)\cap B\left([0,\tau],X_A^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}\right).$$

Come conseguenza, possiamo immediatamente trattare il problema inverso: trovare $(y,F)\in C([0,\tau];D(L))\times C([0,\tau];\mathcal{F})$ tali che

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(By(t))-Ly(t)=M[F(t),Z]+g(t), & 0\le t\le\tau\\ (By)(t)=\xi_0,\\ \Phi[By(t)]=H(t), & 0\le t\le\tau,\end{cases}\tag{7}$$

dove L,B sono operatori lineari chiusi in X, $D(L)\subseteq D(M)$, $0\in\rho(L)$,

$$\left|\left|B(zB-L)^{-1}\right|\right|\le C(1+|z|)^{-\beta}\ \ \forall z\in\Sigma_\alpha.$$

Il cambiamento di variabile $By=u$ trasforma il problema (7) nel problema

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-M[F(t),Z]-g(t)\in LB^{-1}u,\quad 0\le t\le\tau,$$
$$u(0)=\xi_0,$$
$$\Phi[u(t)]=H(t),$$

che è quello trattato nel Teorema 2.1 con $A=LB^{-1}$ perché le ipotesi su M e L assicurano che LB^{-1} soddisfa le assunzioni (H1)-(H2).

Abbiamo quindi il seguente Corollario.

Corollario 2.1. *Valgano le ipotesi precedenti su* B,L *e siano soddisfatte (H3)∼(H6), dove* $A=LB^{-1}$. *Se* $\xi_0=Bv_0$, *con* $v_0\in D(L)$, $Lv_0\in X^\theta_{LB^{-1}}$, $2\alpha+\beta>2$, $2\alpha+\beta+\theta>3$, $Z\in\mathcal{Z}^\theta$, $g\in C([0,\tau];X)\cap B\left([0,\tau];X^\theta_{LB^{-1}}\right)$, $H\in C^1([0,\tau];\mathcal{F})$, $\Phi\in\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$, *allora il problema (7) ammette una unica soluzione*

$$(y,F)\in C([0,\tau];D(L))\times C([0,\tau];\mathcal{F})$$

tale che

$$By \in C^1([0,\tau];X), Ly \in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,\tau];X) \cap B\left([0,\tau];X_{LM^{-1}}^{\frac{2\alpha+\beta+\theta-3}{\alpha}}\right).$$

3. Applicazione 1

Siano M, L operatori lineari chiusi in uno spazio di Banach X soddisfacenti le stime risolventi sopra descritte. Dati $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in X^*$, $z_1, \ldots, z_n \in X$, consideriamo il problema nelle incognite $y_1, f_1, \ldots, f_n \in C([0,\tau];\mathbb{C})$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(My) = Ly(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t)z_i + g(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ (My)(0) = My_0, \\ \Phi_i[My,(t)] = H_i(t), \ i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t \le \tau. \end{cases}$$

Per applicare il Corollario 2.1, prendiamo $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{Z} = X^n = X \times ... \times X$ n volte,

$$X_{LM^{-1}}^{\theta} = \left\{x \in X; \sup_{t>0}(1+t)^{\theta}\|L(tM-L)^{-1}X\|_X < \infty\right\},$$

$$\mathcal{Z}^{\theta} = \left(X_{LM^{-1}}^{\theta}\right)^n, F = (f_1, \ldots f_u) \in \mathbb{C}^M, Z = (z_1, \ldots, z_u) \in \mathcal{Z}^{\theta},$$

$$M[F,Z] = \sum_{j=1}^n f_j z_j, \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in (X^*)^n$$

e $(\Phi_k[z_i])_{j,k=1}^n$ sia una matrice invertibile.

Allora il Corollario si applica immediatamente. Per esempio (cfr. [4, 5]), si prenda $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, L è un operatore differenziale del secondo ordine con condizioni al bordo Dirichlet, $D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega$ regolare, oppure condizioni al bordo di tipo Robin, per cui

$$D(L) = \left\{u \in W^{2,p}(\Omega); \ \sum_{i,j=1}^u a_{ij}\nu_i D_{xi}u + bu = 0 \text{ su } \partial\Omega\right\}$$

dove

$$b(x) + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^N a_i(x)\nu_i(x) \ge 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

$$L = \sum_{i,j=1}^N D_{xi}[a_{ij}(x)D_{xj}] - \sum_{i=1}^N a_i(x)D_{xi} - a_0(x),$$

$$a_i, a_0, D_{xj}a_{ij}, D_{xi}a_i \in C(\overline{\Omega}),$$

$\{a_{ij}\}$ è una matrice simmetrica definita positiva,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_0|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \overline{\Omega},$$

$$b \in L^\infty(\partial\Omega), \quad a_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad a_0 - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N} D_{xi}a_i \geq C_1 > 0 \text{ su } \Omega.$$

Denotiamo con L_p la realizzazione di L in $L^p(\Omega)$.

Tenendo conto delle ipotesi precedenti, si dimostra che se m è misurabile, limitata e non negativa su Ω e M_p è il relativo operatore di moltiplicazione per $m(\cdot)$ in $L^p(\Omega)$, allora sia per condizioni al bordo Dirichlet che per quelle di Robin, vale la stima

$$-\left|\left|M_p\left(\lambda M_p + L_p\right)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq C_{1,p}\left(C_{2,p} + |\lambda|\right)^{-\frac{1}{p}}$$

per tutti i λ con angolo

$$\Re e\lambda \geq -C_p(1 + |\Im m\lambda|).$$

Inoltre, se $m(x)$ è ρ-regolare nel senso di $m \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e

$$|\nabla m(x)| \leq \overline{C}m(x)^\rho,$$

dove $2 - p < \rho < 1$, allora un miglioramento di precedenti risultati di Favini, Lorenzi, Tanabe e Yagi porta alla seguente stima:

$$\left|\left|M_p\left(\lambda M_p - L_p\right)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq \tilde{C}_{1,p}\left(|\lambda| + \tilde{C}_{2,p}\right)^{-(2-\rho)^{-1}}, \quad 1 < p < 2,$$

$$\left|\left|M_p\left(\lambda M_p - L_p\right)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(L^P(\Omega))} \leq \tilde{C}_{1,p}\left(|\lambda| + \tilde{C}_{2,p}\right)^{-2[p(2-\rho)]^{-1}}, \quad 2 < p < \infty.$$

Dunque, tutti i precedenti risultati si applicano.

4. Applicazione 2

Riferendoci alla Applicazione 1, qui consideriamo il problema inverso

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(By) = Ly + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)z_j + g(t), 0 \leq t \leq \tau, \\ (By)(0) = By_0, \\ \Phi_k\left[By(t)\right] = H_k(t), k = 1, 2\ldots \end{cases}$$

sotto le stesse assunzioni per la coppia di operatori lineari chiusi B, L in X.

Prendiamo

$$\mathcal{F} = \ell^2(R), Z = \ell^2(X), F = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2(R),$$

$$Z^\theta = \ell^2\left(X^\theta_{LB^{-1}}\right), Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty} \in Z^\theta, M[F,Z] = \sum_{j=1}^{\infty} f_j z_j$$

Sia

$$\Phi = \{\Phi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2\left(X^*\right)$$

tale che

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \left|\Phi_k\left[z_j\right]\right|^2 < +\infty.$$

Perciò , l'equazione $\Phi\left[M(F,Z)\right] = H$ significa, dato $H \in \ell^2(R)$,

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j z_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \Phi_k\left[z_j\right]\right)_{k\in\mathbb{N}} = H.$$

Supponiamo che la matrice infinita $\left(\Phi_k\left[z_j\right]\right)_{j,k=1}^{\infty}$ definisca un operatore invertibile in $\mathcal{L}\left(\ell^2(R)\right)$, il cui inverso è denotato con

$$\tilde{\Psi}[z] \text{ cosicché } F = \tilde{\Psi}(Z)H = \Psi[H,Z].$$

Si vede allora che tutte le assunzioni (H3)$\sim$(H6) sono soddisfatte e si può quindi applicare il Corollario.

Gli esempi nella precedente sezione possono tutti essere adattati alla situazione sopra descritta. In questo caso, avremo un problema tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(x)u(t,x) = A(x,D)u(t,x) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)z_j + g(t,x), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \Omega,$$

con condizioni al bordo Dirichlet o Robin per l'operatore $A(\cdot, D)$

$$m(x)u(t,x)_{t=0} = m(x)u_0(x),$$

$$\int_\Omega \eta_j(x)m(x)u(t,x)dx = H_j(t), \quad j \in \mathbb{N},$$

dove le η_j sono delle funzioni in $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Applicazione 3

Qui il problema di identificazione, nella sua versione più facile, si legge: trovare $n(N+1)$ funzioni $u_1, \dots, u_n : [0, \tau] \to X$ e $f_{jk} : [0, \tau] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, tali che

$$u_j'(t) = A_j u_j(t) + B_j(u_1(t), \dots, u_n(t)) = \sum_{i=1}^{N} f_{ji} z_i + g_j(t), \quad t \in [0, \tau], j = 1, \dots, n,$$

$$u_j(0) = u_{0j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Phi_k[u_j(t)] = g_{jk}(t), \quad t \in [0, \tau], \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N,$$

dove A_j è un operatore single-valued soddisfacente (H1), (H2) e B_j è una applicazione multilineare continua da $D(A_1) \times \cdots \times D(A_n)$ in $X^{\theta}_{A_j}$, con $1 - \beta < \theta < 1$, $j = 1, \dots, n$.

È facile vedere che se i dati sono sufficientemente regolari e $(\Phi[z_j])_{k,j=1}^{N}$ è una matrice invertibile, allora tutte le nostre ipotesi tengono ed il Teorema 2.1 si applica.

Più generalmente, si può considerare il sistema

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_j u_j)(t) = L_j u_j(t) + \tilde{B}_j(u_1(t), \dots, u_n(t)) = \sum_{i=1}^{N} f_{ji}(t) z_i + g_j(t), \quad t \in [0, \tau], j = 1, \dots, n,$$

$$(B_j u_j)(0) = B_j u_{j0},$$

$$\Phi_k[B_j u_j(t)] = g_{jk}(t), \quad t \in [0, \tau], \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N.$$

In tal caso $\tilde{B}_j$ è una applicazione multilineare continua da $D(L_1) \times \cdots \times D(L_n)$ in $X^{\theta}_{L_j B_j^{-1}}$. Qui si deve far uso di due risultati di perturbazione, che ci assicurano che se $(\lambda B - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C(1 + |\lambda|)^{-\beta}$ e L_2 è un altro operatore in X, $D(L_2) = D(L_1)$, allora

$$\|B(\lambda B - L_1 - L_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C'(1 + |\lambda|)^{-\beta} \text{ per } \lambda \in \Sigma_\alpha.$$

A tal fine, ricordiamo i due principali risultati al riguardo, cfr. Favaron-Favini [2], Theorems 4.4 e 4.7.

Proposizione 5.1. *Siano M, L_1, L_2 operatori lineari chiusi in X, $D(L_1) \subseteq D(L_2) \cap D(M)$,*

$$\|M(zM - L_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C(1 + |z|)^{-\beta}, \quad \Re e z \ge -C(1 + |z|)^{\alpha}.$$

Esista $\gamma \in [0, \beta)$ tale che

$$\|L_2 x\|_X \le C\|Mx\|_X^{1-\gamma} \|x\|_{D(L_1)}^{\gamma}.$$

Allora per ogni $\lambda \in \Sigma_\alpha$, $|\lambda|$ grande, esiste l'inverso $(\lambda M - L_1 - L_2)^{-1}$ e

$$\|M(zM - L_1 - L_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + |z|)^{-\beta},$$

per $z \in \Sigma_\alpha$, $|z|$ grande.

Proposizione 5.2. *Siano L_1, L_2, M operatori lineari chiusi in X, $D(L_1) \subseteq D(L_2) \cap D(M)$ (e quindi possibilmente $D(L_2) = D(L_1)$). Denotiamo $L_1 M^{-1}$ con A_1, soddisfacente*

$$\|(zI - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|M(zM - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \Re ez \geq -C(1 + |\Im mz|)^\alpha.$$

Sia Y_γ^∞ lo spazio di Banach

$$Y_\gamma^\infty = \left\{(X, D(A_1))_{\gamma,\infty}, X_{A_1}^\gamma\right\}, \quad \gamma \in (1 - \beta, 1).$$

Se $L_{2_{D(L_1)}} \in \mathcal{L}(D(L_1); Y_\gamma^\infty)$, allora

$$\|M(zM - L_1 - L_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + |z|)^{-\beta}, \quad \Re ez \geq -C(1 + |z|)^\alpha,$$

$|z|$ sufficientemente grande.

È facile tradurre le condizioni nelle Proposizioni 5.1 e 5.2 nel caso in cui

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{L}_n \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}.$$

Per esempio, la Proposizione 5.2 si applica se la matrice operatoriale $[L_1, \dots, L_n]$ è continua da $D(\mathcal{L}_1) \times \dots \times D(\mathcal{L}_n)$ in uno spazio di Banach Y_i immerso con continuità in

$$Y_{\gamma,i} = \left\{(X, D(\mathcal{L}_i M_i^{-1}))_{\gamma,\infty}, X^\gamma_{\mathcal{L}_i M_i^{-1}}\right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad 1 - \beta < \gamma < 1.$$

Per il caso regolare, $\alpha = \beta = 1$, rimandiamo a Lunardi [11].

References

[1] A. Favaron and A. Favini, *On the behavior of singular semigroups in intermediate and interpolation spaces and its applications to maximal regularity for degenerate integrodifferential equations*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 275494, 37 pages, 2013; doi: 10.11.55/2013/275494.

[2] A. Favaron, A. Favini and H. Tanabe, *Perturbation methods for inverse problems in degenerate differential equations*, to appear.

[3] A. Favini, A. Lorenzi, G. Marinoschi and H. Tanabe, *Perturbation methods and identification problems for degenerate evolution equations*, Contribution to the Seventh Congress of Romanian Mathematicians, Brasov 2011 (Eds L. Beznea, V. Brinzanescu, M. Iosifescu, G. Marinoschi, R. Purice, D. Timotin), Publishing house of the Romanian Academy (2013), 88–96.

[4] A. Favini, A. Lorenzi and H. Tanabe, *Direct and inverse problems for systems of singular differential boundary value problems*, Electronic J. Diff. Eqs, (2012), 1–34.

[5] A. Favini, A. Lorenzi and H. Tanabe, *Direct and inverse degenerate parabolic differential equations with multivalued operators*, to appear.

[6] A. Favini, A. Lorenzi and H. Tanabe, *A general approach to identification problems*, to appear on a volume of INdAM-Springer, 2014, Proceedings of the meeting 'PDEs, Linear Problems, Control Theory', Cortona 2013, Springer.

[7] A. Favini and G. Marinoschi, *Identification for degenerate equations of hyperbolic type*, PDEs, Semigroup Theory, Inverse and Control Problems, edited by A. Favini and A. Lorenzi, Applicable Analysis, vol. 91, n. 8 (2012), 1511-1527.

[8] A. Favini and H. Tanabe, *Degenerate differential equations of parabolic type and inverse problems*, Proceedings of Seminar on Partial Differential Equations in Osaka, *Osaka University*, August 20-24,2012, (2013), 89–100.

[9] A. Favini and A. Yagi, Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 215, M. Dekker Inc, New York, (1999).

[10] S. G. Krein, Differential Equations in Banach Spaces, Translations of Mathematical Monographs AMS, (1972).

[11] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser Basol (1995).

Department of Mathematics, University of Bologna
Piazza di Porta San Donato, 5
40126 Bologna
Italy

E-mail address: angelo.favini@unibo.it