ALGEBRAS OF COMPLETE HÖRMANDER VECTOR FIELDS, AND LIE-GROUP CONSTRUCTION

ALGEBRE DI CAMPI VETTORIALI COMPLETI DI HÖRMANDER, E LA COSTRUZIONE DI GRUPPI DI LIE

ANDREA BONFIGLIOLI

Abstract. The aim of this note is to characterize the Lie algebras $\mathfrak{g}$ of the analytic vector fields in $\mathbb{R}^N$ which coincide with the Lie algebras of the (analytic) Lie groups defined on $\mathbb{R}^N$ (with its usual differentiable structure). We show that such a characterization amounts to asking that: (i) $\mathfrak{g}$ is N-dimensional; (ii) $\mathfrak{g}$ admits a set of Lie generators which are complete vector fields; (iii) $\mathfrak{g}$ satisfies Hörmander's rank condition. These conditions are necessary, sufficient and mutually independent. Our approach is constructive, in that for any such $\mathfrak{g}$ we show how to construct a Lie group $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ whose Lie algebra is $\mathfrak{g}$. *We do not make use of Lie's Third Theorem, but we only exploit the Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin Theorem for ODE's.*

Sunto. Lo scopo di questa nota è di caratterizzare le algebre di Lie $\mathfrak{g}$ di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$ che coincidono con le algebre di Lie dei gruppi di Lie (analitici) definiti su $\mathbb{R}^N$ (con la consueta struttura differenziabile). Mostriamo che tale caratterizzazione equivale a chiedere che: (i) $\mathfrak{g}$ è N-dimensionale; (ii) $\mathfrak{g}$ ammette un set di Lie-generatori che sono campi vettoriali completi; (iii) $\mathfrak{g}$ soddisfa la condizione del rango di Hörmander. Queste condizioni sono necessarie, sufficienti e indipendenti. Il nostro approccio è costruttivo: per tali $\mathfrak{g}$ mostriamo come costruire un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}$. *Non facciamo uso del Terzo Teorema di Lie, bensì solo del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per EDO.*

2010 MSC. Primary: 34A12, 17B66, 49J15; Secondary: 22E60, 34H05.

Keywords. Hörmander vector fields; Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin Theorem; Third Theorem of Lie; Carnot-Carathéodory metric; Completeness of vector fields.

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2014) pp. 15–30

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

ISSN 2240-2829.

1. Introduzione e risultati principali

I risultati di seguito esposti sono stati ottenuti in collaborazione con il dott. Stefano Biagi.

È ben noto che la completezza di un campo vettoriale X appartenente all'algebra di Lie di un gruppo di Lie $\mathbb{G}$ è una conseguenza della sua invarianza a sinistra, vale a dire dell'identità

$$X(\tau_x(y)) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)\, X(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{G}. \tag{1}$$

Qui τ_x denota la traslazione a sinistra di ampiezza x su $\mathbb{G}$ e $\mathcal{J}_{\tau_x}$ la sua matrice Jacobiana. Inoltre, diciamo che un campo vettoriale (possibilmente dipendente dal tempo) è completo se tutte le sue curve integrali massimali sono definite su $\mathbb{R}$.

Una prova di questo fatto è ad esempio la seguente: Basta considerare la curva integrale $\gamma(t)$ di $X \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ uscente dall'elemento neutro $e \in \mathbb{G}$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[-\varepsilon, \varepsilon]$ è contenuto nel dominio di γ. Poniamo $y := \gamma(\varepsilon)$ e consideriamo $\mu(t) := y * \gamma(t)$. Grazie a (1), si vede facilmente che μ è curva integrale di X uscente da y e definita su $[0, \varepsilon]$. Poiché $\gamma(\varepsilon) = \mu(0)$, è possibile incollare le curve $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^N$ e $\mu : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^N$; quindi γ si prolunga ad una curva integrale di X uscente da e e definita su $[-\varepsilon, 2\,\varepsilon]$. Si procede per induzione.

L'identità (1) afferma che X è τ_x-correlato a sé stesso, per ogni $x \in \mathbb{G}$.

L'obiettivo di questa nota è quello di ottenere una condizione sufficiente, che generalizza l'essere "τ_x-correlato a sé stesso", che assicuri che un campo vettoriale X è completo.

Più in generale, ci occupiamo di *campi vettoriali dipendenti dal tempo* della forma seguente

$$a_1(t)\, X_1(x) + \cdots + a_n(t)\, X_n(x),$$

dove $X_1, \ldots, X_n$ sono campi vettoriali localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^N$ e $a_1, \ldots, a_n$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}$. Precisamente, si dimostra il seguente Teorema 1.1. Qui e nel seguito, data una funzione differenziabile $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ definita su un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, indichiamo indifferentemente con $\mathcal{J}_F(x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ la matrice Jacobiana di f in

$x \in \Omega$. Inoltre, se $X = \sum_{j=1}^N a_j \, \partial/\partial x_j$ è un campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$ (pensato come un operatore differenziale di ordine uno su $\mathbb{R}^N$), identificheremo $X(x)$ con la funzione $(a_1(x), \ldots, a_N(x))^T$, scritta (per scopi di calcolo matriciale) come matrice colonna $N \times 1$ (come in (1), o in (3) di seguito).

Il nostro risultato principale di EDO è il seguente:

Theorem 1.1. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ campi vettoriali localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^N$ soddisfacenti la seguente ipotesi: esistono un intorno aperto U di $0 \in \mathbb{R}^N$ e una funzione $m : \mathbb{R}^N \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 tali che*

$$m(x, 0) = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

e tali che, per ogni $j = 1, \ldots, n$,

$$X_j(m(x, y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, y) \cdot X_j(y) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N \text{ e ogni } y \in U. \tag{3}$$

Infine siano $a_1, \ldots, a_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Allora, per ogni fissato $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale $\gamma(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(t) \, X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(t_0) = \xi, \end{cases} \tag{4}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè il campo vettoriale dipendente dal tempo $\sum_{j=1}^n a_j(t) \, X_j(x)$ è completo.

La prova di questo teorema verrà fornita nella Sezione 2.

Remark 1.1. La scelta di 0 in (2) è irrilevante: può essere sostituito da qualsiasi punto di $\mathbb{R}^N$. Chiaramente, l'ipotesi (3) generalizza la proprietà di invarianza a sinistra in (1) se si prende $m(x, y) := \tau_x(y)$ (che soddisfa (2), sostituendo 0 con l'elemento neutro di $\mathbb{G}$).

Naturalmente è d'interesse stabilire se e quando, dati campi vettoriali $X_1, \ldots, X_n$, una siffatta mappa m può essere costruita. Descriviamo ora un contesto geometrico/analitico in cui è possibile costruire una tale mappa. Ci poniamo infatti il seguente problema, [4, 7, 8, 9]:

(P): *Data una sottoalgebra* $\mathfrak{g}$ *dei campi vettoriali analitici su* $\mathbb{R}^N$*, stabilire se* $\mathfrak{g}$ *coincide con l'algebra di Lie,* $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$*, di un gruppo di Lie analitico* $\mathbb{G}$ *la cui varietà sottostante è l'intero spazio* $\mathbb{R}^N$ (con la consueta struttura di varietà differenziabile).

La risposta al problema (P) è data dalle condizioni (C), (H), (ND) contenute nella seguente:

Definition 1.1. *Data un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *di campi vettoriali lisci in* $\mathbb{R}^N$*, diciamo che*

$\mathfrak{g}$ **soddisfa l'ipotesi (C):** *se ogni elemento* $X \in \mathfrak{g}$ *è un campo vettoriale completo;*

$\mathfrak{g}$ **soddisfa l'ipotesi (H):** *se è verificata la condizione del rango di Hörmander, ossia*

$$\dim_{\mathbb{R}} \big(\{X(x) \in \mathbb{R}^N \,:\, X \in \mathfrak{g}\}\big) = N, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

$\mathfrak{g}$ **soddisfa l'ipotesi (ND):** *se la dimensione di* $\mathfrak{g}$ *è uguale a* N*, come sottospazio vettoriale dei campi vettoriali lisci in* $\mathbb{R}^N$*.*

Che le condizioni (C), (H), (ND) siano necessarie a risolvere (P) è semplice da verificare, [10]. Utilizzando alcuni risultati notevoli di Palais[1] [19] nonché il Terzo Teorema Fondamentale di Lie, si può dimostrare, con tecniche di Teoria del Controllo (e un'analisi dettagliata della topologia delle orbite dei campi di $\mathfrak{g}$), che se $\mathfrak{g}$ soddisfa (C), (H) e (ND), allora il problema (P) ha una soluzione. *In* [2] *dimostriamo questo risultato con tecniche molto più dirette ed elementari*, come ora descriviamo brevemente. La novità del nostro approccio risiede nel mostrare che il Terzo Teorema di Lie e le tecniche di Palais possono essere sostituite da un uso congiunto del nostro Teorema 1.1 di globalità (per EDO), e del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin.[2]

[1]Abbiamo recentemente riottenuto (cfr. [11]) il risultato di Palais, sotto ipotesi ancora più generali, usando le tecniche di Montanari e Morbidelli in [15, 16], mediante uno studio delle associate metriche di controllo, come in [18], e delle mappe quasi-esponenziali, anzichè le tecniche topologiche e di Geometria Differenziale in [19].

[2]Seguiamo la denominazione nella recente monografia [6].

Inoltre, forniamo alcuni chiarimenti sulla specificità del problema (P): in (P), con il simbolo Lie($\mathbb{G}$) (tra le diverse definizioni di algebra di Lie di un gruppo di Lie) si intende l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra associati a $\mathbb{G}$, dove, per campo vettoriale X si intende un operatore differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^N$, scritto nella forma coordinata standard $X = \sum_{j=1}^N \alpha_j(x)\,\partial/\partial x_j$ dove $\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x)$ sono funzioni analitiche su $\mathbb{R}^N$ a valori reali. Pertanto, al fine di risolvere il problema (P), non ci accontentiamo di un qualche gruppo di Lie la cui algebra di Lie sia *isomorfa* a $\mathfrak{g}$, ma vogliamo dotare lo spazio N-dimensionale $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie (compatibile con la consueta struttura differenziabile di $\mathbb{R}^N$) tale che Lie($\mathbb{G}$) (nel senso di cui sopra) è <u>*uguale a*</u> $\mathfrak{g}$ (che è un'algebra di campi vettoriali).

Abbiamo quindi il seguente risultato:

Theorem 1.2. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici su $\mathbb{R}^N$. Allora, un insieme di condizioni necessarie e sufficienti, mutuamente indipendenti, affinché il problema (P) sia risolubile è la validità congiunta per $\mathfrak{g}$ delle ipotesi (C), (H), (ND) nella Definizione 1.1.*

Inoltre, dato $x_0 \in \mathbb{R}^N$, esiste uno ed un solo gruppo $\mathbb{G}$ che risolve (P) la cui identità è x_0.

Il fatto che esistono algebre di Lie $\mathfrak{g}$ soddisfacenti *due sole* tra le ipotesi (C), (H), (ND) (da cui l'indipendenza di queste condizioni) è facile da mostrare:

1. ((H)+(ND)$\Longrightarrow$(C)): Se $X = (1 + x_1^2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$ su $\mathbb{R}$, si ha che $\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X\}$ soddisfa (H) e (ND), ma viola (C).
2. ((C)+(ND)$\Longrightarrow$(H)): Se $X = x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}$ in $\mathbb{R}$, si ha che $\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X\}$ soddisfa (C) e (ND), ma viola (H) ((5) è falsa in $x_1 = 0$, $N = 1$).
3. ((C)+(H)$\Longrightarrow$(ND)): Se $X = x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x_1}$ in $\mathbb{R}$, si ha $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X, Y\} = \mathrm{span}\{X, Y\}$, e quindi $\mathfrak{g}$ soddisfa (C) e (H), ma viola (ND) giacché $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = 2 \neq 1$. Inoltre $\mathfrak{g}$ può verificare (C) e (H) senza essere finito-dimensionale, come per $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{1+x_1^2}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\}$.

Il problema (P) è stato precedentemente studiato in [8]: in tale articolo, oltre alle ipotesi (C), (H), (ND), si assume una ipotesi di prolungamento del gruppo di Lie *locale* associato a $\mathfrak{g}$. Nella presente nota (i dettagli si trovano in [2]) si dimostra che questa ipotesi è automaticamente garantita dalla validità di (C), (H), (ND).

Descriviamo ora brevemente la costruzione del gruppo di Lie locale che possiamo associare a $\mathfrak{g}$ nel Teorema 1.2, e mostriamo come il Teorema 1.1 viene sfruttato per la *globalizzazione* di questo gruppo di Lie locale. L'esistenza di un gruppo di Lie locale associato a algebre di Lie di dimensione finita di campi vettoriali ("trasformazioni infinitesime", come venivano chiamate agli albori della teoria dei gruppi di Lie) risale agli inizi della teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie (cfr. ad esempio, [20]). Rispetto alle prime fasi di questa teoria, quando il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin non era stato completamente chiarito, avremo modo di sfruttare appieno quest'ultimo potente teorema.

Per descrivere la nostra costruzione, fissiamo alcune notazioni. D'ora in poi, supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici su $\mathbb{R}^N$ soddisfacente le ipotesi (C), (H), (ND) in Definizione 1.1. Dato un campo vettoriale liscio X su $\mathbb{R}^N$ e $x \in \mathbb{R}^N$, il problema di Cauchy

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x$$

ha una unica soluzione $t \mapsto \gamma(t, x, X)$, che indichiamo con $\exp(t\,X)(x)$, definita su un opportuno intervallo reale. Se X è fissato, con la notazione $\exp(X)(x)$ intenderemo sempre tacitamente $\exp(t\,X)(x)\big|_{t=1}$, a condizione che ciò sia ben definito. Quando la condizione (C) è soddisfatta e $X \in \mathfrak{g}$, è ben posta la mappa

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathrm{Exp}(X) := \exp(X)(0). \tag{6}$$

Osserviamo che $\mathrm{Exp}(0) = 0$. Poiché $\mathfrak{g}$ è composta da campi vettoriali analitici, da risultati generali di teoria delle EDO, sappiamo che $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è reale analitica.[3] Inoltre, non è difficile vedere che il differenziale di questa mappa in $0 \in \mathfrak{g}$ è non singolare; quindi possiamo trovare un intorno aperto $\mathfrak{U}$ dell'origine in $\mathfrak{g}$ e un intorno U dell'origine in $\mathbb{R}^N$ tale che $\mathrm{Exp}|_{\mathfrak{U}}$ è un diffeomorfismo analitico di $\mathfrak{U}$ su U, con mappa inversa indicata con

[3]Qui e altrove dotiamo $\mathfrak{g}$ della sua struttura differenziabile standard di spazio vettoriale *finito-dimensionale.*

$\mathrm{Log} : U \to \mathfrak{U}$. Siamo pronti a introdurre la seguente funzione:

$$m : \mathbb{R}^N \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad m(x,y) := \exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)(x), \tag{7}$$

che è ben posta a causa della assunzione di completezza (C) su $\mathfrak{g}$. Ponendo

$$x * y := m(x,y) \qquad (\text{con } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } y \in U),$$

il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin ci permette di dimostrare che $(\mathbb{R}^N, *)$ è un *gruppo di Lie locale* con elemento neutro 0 (da cui (2) è soddisfatta), con una operazione di inversione locale data da

$$x^{-1} := \mathrm{Exp}(-\mathrm{Log}(x)) \qquad (\text{per } x \in U),$$

e con l'algebra di Lie uguale a $\mathfrak{g}$: temporaneamente (finché sappiamo che questo gruppo è solo locale), quest'ultimo fatto significa che

$$X(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, X(y) \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{g},\ x \in \mathbb{R}^N \text{ e } y \in U. \tag{8}$$

Questa è esattamente l'identità (3). Data la sua centralità, riportiamo una traccia di questi fatti (una conseguenza del Teorema CBHD!) nella Sezione 2.

> *È dunque grazie al Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin che riusciamo a costruire una mappa locale $m(x,y)$ che soddisfa la proprietà di (quasi-)invarianza* (8)*, che, grazie al Teorema 1.1 di globalizzazione, ci permetterà di ottenere un gruppo globale a partire dal gruppo locale.*

Il punto cruciale è quindi dimostrare che la mappa m di cui sopra può essere *analiticamente estesa a tutto* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. La prova di questo fatto è il cuore della nostra tesi, e si basa fondamentalmente sul seguente Corollario 1.1 (conseguenza del Teorema 1.1).

Corollary 1.1. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici su $\mathbb{R}^N$ soddisfacenti (C), (H), (ND) in Definizione 1.1. Siano poi $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ e $a_1, \dots, a_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ la soluzione massimale $\gamma(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t)\, X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \xi, \end{cases} \tag{9}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Proof. Se $m : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}^N$ è come in (7), essa soddisfa (2) (ovviamente) e anche (3) (che è l'identità (8)). Si può quindi applicare il Teorema 1.1 di completezza. $\square$

L'estendibilità di m è ottenuta dal Corollario 1.1 come segue. Con un calcolo diretto (reso possibile da (8) e, soprattutto, dalla condizione del rango di Hörmander (H)), siamo in grado di dimostrare che, fissati arbitrariamente $x, y \in \mathbb{R}^N$, la curva

$$t \mapsto \gamma_{x,y}(t) := m(x, t\, y)$$

(che è a priori definita solo per piccoli t dipendenti da y) *è una soluzione di un problema di Cauchy di tipo* (9). L'argomento è il seguente:

Innanzitutto si ha $\gamma_{x,y}(0) = m(x, 0) = x$ (si veda (2)); inoltre, per definizione si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{x,y}(t) = \left(\frac{\partial\, m}{\partial y}(x, t\, y)\right) y.$$

Il trucco è scrivere y in termini di campi vettoriali in $\mathfrak{g}$, *per mezzo della condizione di Hörmander (H)*, ed usare quindi (8). Infatti, grazie alla condizione (H) è possibile ottenere una base $\{J_1, \dots, J_N\}$ di $\mathfrak{g}$ tale che $J(z) := (J_1(z) \cdots J_N(z))$ è non-singolare per ciascuno $z \in \mathbb{R}^N$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$y = J(t\, y)\, \alpha(t, y), \quad \text{dove } \alpha(t, y) := \big(J(t\, y)\big)^{-1} y. \tag{10}$$

Si ha dunque (almeno per quei t tali che $t\, y \in U$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{x,y}(t) &\overset{(10)}{=} \frac{\partial\, m}{\partial y}(x, t\, y)\, J(t\, y)\, \alpha(t, y) = \frac{\partial\, m}{\partial y}(x, t\, y) \Big(J_1(t\, y) \cdots J_N(t\, y)\Big)\, \alpha(t, y) \\
&= \left(\frac{\partial\, m}{\partial y}(x, t\, y)\, J_1(t\, y) \cdots \frac{\partial\, m}{\partial y}(x, t\, y)\, J_N(t\, y)\right) \alpha(t, y) \\
&\overset{(8)}{=} \Big(J_1(m(x, t\, y)) \cdots J_N(m(x, t\, y))\Big)\, \alpha(t, y) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t, y)\, J_j(\gamma_{x,y}(t)).
\end{aligned}$$

Questo è il cuore del nostro argomento, e la motivazione per il nostro interesse verso risultati di completezza come il Teorema 1.1. Il Corollario 1.1 garantisce infatti l'esistenza di $\gamma_{x,y}(t)$ *per ogni tempo*, e possiamo definire una funzione

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto \widetilde{m}(x, y) := \gamma_{x,y}(1) \in \mathbb{R}^N,$$

che prolunga analiticamente m ed eredita da m tutte le proprietà di gruppo locale; queste proprietà locali possono essere trasformate (mediante Unique Continuation) in proprietà globali, poiché $\widetilde{m}$ è ovunque reale analitica. Per quanto riguarda l'esistenza di una legge di inversione globale e analitica, possiamo sfruttare semplici argomenti topologici e il Teorema delle Funzioni Implicite. Da questi ultimi argomenti, segue il Teorema 1.2 (con $x_0 = 0$). Il caso di $x_0 \neq 0$ non è difficile da trattare.

Remark 1.2. Prendendo in considerazione la letteratura esistente, si osserva che questioni relative al prolungamento della operazione di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin su algebre di Lie finito-dimensionali $\mathfrak{f}$ sono state studiate da Eggert in [13]. Eggert dimostra che l'operazione locale su $\mathfrak{f}$ definita dalla 'serie di Campbell-Hausdorff'

$$X \diamond Y := X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}([[X,Y],Y] + [[Y,X],X]) + \cdots$$

può essere estesa a tutto $\mathfrak{f}\times\mathfrak{f}$ se e solo se il gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso associato a $\mathfrak{f}$ dal Terzo Teorema di Lie è *globalmente isomorfo* a $\mathfrak{f}$ tramite la mappa esponenziale. Purtroppo, non ci è permesso utilizzare questo risultato, dal momento che l'estendibilità della moltiplicazione $\diamond$ su $\mathfrak{f}$ è solo sufficiente, ma non necessaria, per l'estendibilità di m. Per questo scopo, diamo l'esempio seguente, per il quale il nostro risultato è valido ma l'estendibilità ottenuta in [13] non sussiste.

Example 1.1. Consideriamo su $\mathbb{R}^3$ i campi vettoriali

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \cos x_1 \partial_{x_2} + \sin x_1 \partial_{x_3}.$$

È facile vedere che $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X_1, X_2\}$ è 3-dimensionale (da cui (ND) è soddisfatta) e soddisfa anche le ipotesi (C) (qualsiasi campo vettoriale in $\mathfrak{g}$ ha coefficienti limitati) e (H) (come è facilmente visibile). La mappa Exp (nel senso di (6)) è data da

$$\begin{aligned}&\mathrm{Exp}\big(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 [X_1, X_2]\big)\\ &= \left(\xi_1, \xi_2 \frac{\sin \xi_1}{\xi_1} + \xi_3 \frac{\cos \xi_1 - 1}{\xi_1}, -\xi_2 \frac{\cos \xi_1 - 1}{\xi_1} + \xi_3 \frac{\sin \xi_1}{\xi_1}\right).\end{aligned}$$

Osserviamo che Exp *non è iniettiva né suriettiva.* Dopo calcoli noiosi, è possibile verificare che la relativa mappa $m(x, y)$ in (7) è uguale a

$$m(x,y) = \Big(x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2 \cos x_1 - y_3 \sin x_1, \quad x_3 + y_2 \sin x_1 + y_3 \cos x_1\Big) =: x * y.$$

In questo esempio l'estendibilità dell'operazione di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin su $\mathfrak{g}$ non può essere realizzata, come il risultato in [13] mostra (infatti Exp non è un diffeomorfismo); tuttavia l'estendibilità analitica di m è vera, come prova il nostro Teorema 1.2.

Osserviamo che l'operatore $P = X_1^2 + X_2$ è stato introdotto da Mumford in [17], relativamente ad applicazioni alla computer vision. Per mezzo del nostro Teorema 1.2, ne consegue che P è invariante su $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^3, *)$, con $*$ come sopra.

Descriviamo ora alcune ulteriori applicazioni dei Teoremi 1.1 e 1.2. Sia $\{X_1, \dots, X_n\}$ un insieme di campi vettoriali analitici su $\mathbb{R}^N$ tale che $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_n\}$ soddisfi le ipotesi (C), (H), (ND) in Definizione 1.1. Allora:

(1) Sia $p(z_1, \dots, z_n)$ un polinomio reale in n indeterminate $z_1, \dots, z_n$ non commutative, e consideriamo l'operatore $P = p(X_1, \dots, X_n)$ in $\mathbb{R}^N$. Allora P è invariante rispetto al gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ costruito nel Teorema 1.2. Per alcuni esempi di applicazioni alle EDP, si segnalano i recenti lavori [8, 12]. Altri esempi (di rilievo anche in ambito applicato) a cui il Teorema 1.2 è applicabile sono: Operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck in [5, 8]; operatori degeneri di tipo Ornstein-Uhlenbeck in [9]; operatori omogenei (cioè, che ammettono dilatazioni) in [4, 7].

(2) In [2] vengono date applicazioni dei Teoremi 1.1 e 1.2 alla Teoria del Controllo, relativamente al contesto sub-ellittico delle distanze di Carnot-Carathéodory associate a famiglie $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ di campi vettoriali che soddisfano le nostre ipotesi di struttura (C), (H), (ND). Si hanno infatti i seguenti risultati:

- (2.a) Le palle della distanza di Carnot-Carathéodory d_X sono sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^N$ (con la consueta struttura metrica euclidea).
- (2.b) Per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste una X-geodetica che collega x e y, cioè, una curva X-subunitaria $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$ e $T = d_X(x, y)$.

Considerando che (2.b) segue da (2.a) da argomenti generali, si dimostra (2.a) sfruttando il fatto che $X_1, \dots, X_n$ sono invarianti su $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ (Teorema 1.2), il che ci permette di invocare un risultato di Jurdjevic e Sussmann, [14], che hanno dimostrato che i dischi di Carnot-Carathéodory relativi a campi vettoriali invarianti a sinistra su gruppi di Lie sono limitati.

2. La prova del Teorema 1.1 e l'uso del Toerema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per EDO

Dimostrazione (del Teorema 1.1). Per assurdo, esistano $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$ tali che l'estremo superiore del dominio della soluzione massimale γ di (4) sia finito, diciamo $T > t_0$. Sia $K := [t_0, T]$. Sia poi $m : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}^N$ come nel Teorema 1.1. Fissiamo un piccolo $h > 0$ tale che $\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \le h\}$ sia contenuto in U, intorno aperto di 0. Giocando sui "cilindri di sicurezza", si può trovare $\varepsilon = \varepsilon(K, h) > 0$ tale che la famiglia di problemi di Cauchy (dipendenti dal parametro $\tau \in K$)

$$(11) \qquad (\mathrm{PC})_\tau : \qquad \begin{cases} \dot\varphi(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_j(t+\tau)\, X_j(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

abbia soluzioni massimali $t \mapsto \varphi_\tau(t)$ definite su $[-\varepsilon, \varepsilon]$, uniformemente per $\tau \in K$; è inoltre verificata la stima uniforme

$$(12) \qquad \|\varphi_\tau(t)\| \le h, \qquad \text{per ogni } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad (\text{uniformemente per } \tau \in K).$$

Fissiamo $\tau \in (t_0, T)$ tale che $|T - \tau| < \varepsilon$, e sia $x := \gamma(\tau)$, ove γ è la soluzione massimale di (4) (x ha senso poiché γ è definita su $[t_0, T) \ni \tau$). Poniamo

$$(13) \qquad \nu(t) := m(x, \varphi_\tau(t)), \qquad t \in [0, \varepsilon],$$

ove φ_τ è la soluzione massimale di $(\mathrm{PC})_\tau$ in (11). Si ha che ν è ben posta giacché $\tau \in K$ e, da (12), si ha

$$(14) \qquad \varphi_\tau([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \le h\} \subset U,$$

essendo poi m definita su $\mathbb{R}^N \times U$. Poiché m è C^1, lo stesso vale per ν. Si vede facilmente che ν risolve su $[0,\varepsilon]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau)\, X_j(\nu(t)) \\ \nu(0) = x. \end{cases} \tag{15}$$

Infatti, $\nu(0) = x$ segue da (2); inoltre, per $t \in [0,\varepsilon]$, si ha l'argomento cruciale, basato su (3),

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) &\overset{(13)}{=} \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t)) \cdot \dot{\varphi}_\tau(t) \overset{(11)}{=} \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t)) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau)\, X_j(\varphi_\tau(t)) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau)\, \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t)) \cdot X_j(\varphi_\tau(t)) \\ &\quad \text{(dalla ipotesi (3) e da (14))} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau)\, X_j(m(x, \varphi_\tau(t))) \overset{(13)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau)\, X_j(\nu(t)). \end{aligned}$$

Incollando ν e γ, si potrebbe estendere γ oltre T (poiché $\tau + \varepsilon > T$), assurdo. $\square$

Mostriamo ora come usare il Teorema CBHD per dimostrare l'identità di invarianza (8).

Theorem 2.1 (Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per EDO)**.** *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$ soddisfacente le condizioni (C), (H), (ND) in Definizione 1.1. Siano $U, \mathfrak{U}$ e m come in* (7)*. Allora esiste un intorno $W \subseteq U$ dell'origine di $\mathbb{R}^N$ e una funzione $\mathfrak{Z} : W \times W \longrightarrow \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{g}$ tali che*

$$m(x,y) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(x,y)), \quad \textit{per ogni } x,y \in W. \tag{16}$$

Più precisamente, la mappa $\mathfrak{Z}$ può essere definita come segue:

$$\mathfrak{Z}(x,y) = \mathrm{Log} x \diamond \mathrm{Log} y, \quad \textit{per ogni } x,y \in W, \tag{17}$$

dove $\diamond$ è l'operazione locale di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin sull'algebra di Lie finito-dimensionale $\mathfrak{g}$ (si veda sotto). Inoltre si ha

$$m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z)), \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N \textit{ ed ogni } y,z \in W. \tag{18}$$

Infine, l'identità cruciale di invarianza

$$X(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, X(y) \quad \textit{per ogni } X \in \mathfrak{g},\ x \in \mathbb{R}^N \textit{ e } y \in U. \tag{19}$$

Alcuni risultati sulla "grandezza" di W sono stati recentemente ottenuti in [1].

Proof. Per $X, Y \in \mathfrak{g}$ (e ogni $h \in \mathbb{N}$), poniamo

$$Z_h(X,Y) := \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k=h \\ (i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0)}} \frac{(\operatorname{ad} X)^{i_1}(\operatorname{ad} Y)^{j_1}\cdots(\operatorname{ad} X)^{i_k}(\operatorname{ad} Y)^{j_k-1}(Y)}{i_1!\cdots i_k!\, j_1!\cdots j_k!}.$$

Il famoso Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin (si veda [6]) assicura che:

(1) per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{h+k=n} \frac{X^h \circ Y^k}{h!\,k!} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_h\geq 1 \\ k_1+\cdots+k_h=n}} Z_{k_1}(X,Y)\circ\cdots\circ Z_{k_h}(X,Y). \tag{20}$$

(2) Dalla condizione (ND), la serie $X \diamond Y := \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X,Y)$ è uniformemente convergente su un intorno dell'origine. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X,Y)$ è convergente in $\mathfrak{g}$ qualora $X, Y \in \mathfrak{g}$ soddisfano $\|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} \leq \varepsilon$, ove $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}$ è la norma euclidea associata alla identificazione $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^N$ (attraverso qualche base di $\mathfrak{g}$).

(3) Ragionando come in [5], a partire da (20), si prova che

$$\exp(Y)(\exp(X)(x)) = \exp(X \diamond Y)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ X, Y \in \mathfrak{g} \text{ tali che } \|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon. \tag{21}$$

Per ottenere questo, si usa la real-analiticità dei campi in $\mathfrak{g}$, congiuntamente al fatto che:

- la serie di MacLaurin di $t \mapsto \exp(tY)(\exp(tX)(x))$ è

$$\sum_n t^n \left\{ \sum_{h+k=n} \frac{X^h \circ Y^k}{h!\,k!} \right\}(x);$$

- la serie di MacLaurin di $t \mapsto \exp((tX)\diamond(tY))(x) = \exp(\sum_k Z_k(tX,tY))(x)$ è

$$\sum_n t^n \left\{ \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_h\geq 1 \\ k_1+\cdots+k_h=n}} Z_{k_1}(X,Y)\circ\cdots\circ Z_{k_h}(X,Y) \right\}(x).$$

Dunque (21) segue da (20) per il principio di identità delle funzioni analitiche (e $t = 1$).

Possiamo supporre che $\varepsilon > 0$ sia così piccolo che $\{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon\}$ sia contenuto in $\mathfrak{U}$. Restringendo $\varepsilon > 0$, possiamo assumere (per continuità) che $\sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X, Y) \in \mathfrak{U}$, per ogni X, Y tali che $\|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} \le \varepsilon$. Ancora per continuità, possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $\mathrm{Log}(B(0, \delta)) \subseteq \{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon\}$. Poniamo

$$W := B(0, \delta), \qquad \mathfrak{Z} : W \times W \longrightarrow \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{Z}(x, y) := \mathrm{Log}x \diamond \mathrm{Log}y = \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(\mathrm{Log}x, \mathrm{Log}y).$$

Claim: si ha $m(x, y) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(x, y))$ per ogni $x, y \in W$. Infatti, se $x, y \in W$ si ha (per costruzione di W) $\|\mathrm{Log}x\|_{\mathfrak{g}}, \|\mathrm{Log}y\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon$, cosicché, da (21),

$$\begin{aligned} m(x, y) &\overset{(7)}{=} \exp(\mathrm{Log}y)(x) = \exp(\mathrm{Log}y)(\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}x)) = \exp(\mathrm{Log}y)\big(\exp(\mathrm{Log}x)(0)\big) \\ &\overset{(21)}{=} \exp((\mathrm{Log}x) \diamond (\mathrm{Log}y))(0) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(x, y)). \end{aligned}$$

Da questo risultato segue immediatamente la locale associatività:

$$\begin{aligned} m(m(x, y), z) &= \exp(\mathrm{Log}z)(m(x, y)) = \exp(\mathrm{Log}z)(\exp(\mathrm{Log}y)(x)) \\ &= \exp(\mathrm{Log}y \diamond \mathrm{Log}z)(x) = m(x, m(y, z)), \end{aligned}$$

ove abbiamo usato $\mathrm{Log}y \diamond \mathrm{Log}z = \mathrm{Log}(m(y, z))$, che segue da (16) e (17). Per finire, sia $X \in \mathfrak{g}$ e proviamo l'identità matriciale

$$X(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, 0)\, X(0) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N, \tag{22}$$

che è (19) con $y = 0$. Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $t\,X \in \mathfrak{U}$, si ha

$$\exp(t\,X)(x) = \exp(\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(t\,X)))(x) = m\big(x, \mathrm{Exp}(t\,X)\big).$$

A ben guardare, *questa identità è davvero quella cruciale: mostra come la mappa* $m(x, \cdot)$ *permetta di scrivere la curva integrale* $\exp(t\,X)(x)$ *sotto forma di "traslazione a sinistra" del flusso di base* $\mathrm{Exp}(t\,X)$. Per definizione di curva integrale segue:

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0} \big\{ \exp(t\,X)(x)) \big\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0} \big\{ m\big(x, \mathrm{Exp}(t\,X)\big) \big\} \\ &= \frac{\partial m}{\partial y}(x, 0)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0} \mathrm{Exp}(t\,X) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, 0)\, X(0), \end{aligned}$$

da cui (22). Per Unique Continuation, è sufficiente provare (19) per $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times W$. Da (18) si ha $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ per $x \in \mathbb{R}^N$ e $y, z \in W$. Differenziando rispetto a z in $z = 0$,

$$\mathcal{J}_{m(m(x,y),\,\cdot)}(0) = \mathcal{J}_{m(x,\,\cdot)}(m(y,0))\,\mathcal{J}_{m(y,\,\cdot)}(0).$$

Moltiplichiamo a destra per $X(0)$ e otteniamo (posto $m = m(\alpha, \beta)$):

$$\frac{\partial m}{\partial \beta}(m(x,y),0)\,X(0) = \frac{\partial m}{\partial \beta}(x, m(y,0))\,\frac{\partial m}{\partial \beta}(y,0)\,X(0).$$

Da $m(y, 0) = y$ e (22) segue (19) per $y \in W$. □

References

[1] S. Biagi, A. Bonfiglioli. *On the convergence of the Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin series in infinite-dimensional Banach-Lie algebras*. Linear Multilinear Algebra, **62** (2014), 1591–1615

[2] S. Biagi, A. Bonfiglioli. *A completeness result for time-dependent vector fields and applications*. To appear in. Commun. Contemp. Math. DOI. 10.1142/S0219199714500400

[3] S. Biagi, A. Bonfiglioli, G. Spaletta. *A tool for Lie group construction*. Preprint (2015)

[4] A. Bonfiglioli. *Homogeneous Carnot groups related to sets of vector fields*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **7** (2004), 79–107

[5] A. Bonfiglioli. *An ODE's version of the formula of Baker, Campbell, Dynkin and Hausdorff and the construction of Lie groups with prescribed Lie algebra*. Mediterr. J. Math., **7** (2010), 387–414

[6] A. Bonfiglioli, R. Fulci. Topics in Noncommutative Algebra. The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2034, Springer-Verlag. Heidelberg, 2012. ISBN. 978-3-642-22596-3

[7] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli. *On left invariant Hörmander operators in R^N. Applications to Kolmogorov-Fokker-Planck equations*. Journal of Mathematical Sciences, **171**(2010), 22–33

[8] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli. *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations*. Commun. Pure Appl. Anal., **11** (2012), 1587–1614

[9] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli. *Matrix exponential groups and Kolmogorov-Fokker-Planck equations*. J. Evol. Equ., **12** (2012), 59–82

[10] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, New York, NY, Springer 2007. ISBN. 978-3-540-71896-3

[11] A. Bonfiglioli, A. Montanari, D. Morbidelli. *A Hadamard-type open map theorem for submersions and applications to completeness results in control theory*. To appear in. Ann. Mat. Pur. Appl. (2015)

[12] M. Bramanti, G. Cupini, E. Lanconelli, E. Priola. *Global L^p estimates for degenerate Ornstein-Uhlenbeck operators.* Math. Z. **266** (2010), 789–816

[13] A. Eggert. *Extending the Campbell-Hausdorff multiplication.* Geom. Dedicata. **46** (1993), 35–45

[14] V. Jurdjevic, H.J. Sussmann. *Control systems on Lie groups.* J. Differential Equations. **12** (1972), 313–329

[15] A. Montanari, D. Morbidelli. *Nonsmooth Hörmander vector fields and their control balls.* Trans. Am. Math. Soc. **364** (2012), 2339–2375

[16] A. Montanari, D. Morbidelli. *Almost exponential maps and integrability results for a class of horizontally regular vector fields.* Potential Anal. **38** (2013), 611–633

[17] D. Mumford. *Elastica and computer vision.* In "Algebraic geometry and its applications" (eds. Bajaj, Chandrajit) Springer-Verlag, New-York (1994), 491–506

[18] A. Nagel, E.M. Stein, S. Wainger. *Balls and metrics defined by vector fields I. basic properties.* Acta Math. **155** (1985), 103–147

[19] R.S. Palais. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Mem. AMS, **22** (1957).

[20] F. Schur. *Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen.* Math. Ann., **38** (1891), 263–286

Andrea Bonfiglioli, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna, Piazza di Porta San Donato, 5 - 40126 Bologna, Italy

E-mail address: andrea.bonfiglioli6@unibo.it