DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR LINEAR RELATIONS
PROBLEMI DIRETTI E INVERSI PER RELAZIONI LINEARI

ANGELO FAVINI

SOMMARIO. Direct and inverse problem related to linear differential inclusions in Banach spaces are studied. The abstract results are applied to degenerate partial differential equations of parabolic type.

SUNTO. Si studiano problemi diretti e inversi relativi a inclusioni differenziali lineari in uno spazio di Banach. I risultati astratti sono applicati ad equazioni alle derivate parziali degeneri di tipo parabolico.

Benché il Professor BRUNO PINI sia mancato da vari anni, all'inizio di questo ciclo di seminari, voglio rivolgere un commosso pensiero al nostro maestro.

1. INTRODUZIONE

In questo seminario esporró alcuni recentissimi risultati sul problema diretto in uno spazio di Banach complesso X

$$\begin{cases} f(t) - \frac{d}{dt}y(t) \in Ay(t), \quad 0 \le t \le T, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove A è una relazione lineare in X, cioé un operatore lineare multivoco in X tale che

$$\rho(A) \supseteq \Sigma_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re\lambda \le c(1 + |Im\lambda|)^\alpha\} \tag{2}$$

e per ogni $\lambda \in \Sigma_\alpha$

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2013) pp. 1–14
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
ISSN 2240-2829.

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C(1+|\lambda|)^{-\beta} \tag{3}$$

con $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $C > 0$.

È mostrato nella monografia [5] di Favini e Yagi che $-A$ genera un semigruppo C^∞ e^{-tA}, $0 < t < \infty$, di operatori lineari in X.

Nella prima parte del seminario verranno estesi al caso multivoco alcuni risultati di Favini, Lorenzi, Tanabe [3] relativi ad opertori A single-valued.

Passeremo poi ad applicare i risultati relativi al problema diretto al seguente problema di identificazione nelle incognite y, f, dove $\Phi \in X^*$ è dato:

$$\begin{cases} f(t)z + h(t) - \frac{d}{dt}y(t) \in Ay(t), & 0 \le t \le T \\ y(0) = y_0, & \\ \Phi[y(t)] = g(t), & 0 \le t \le T \end{cases} \tag{4}$$

sotto alcune condizioni di regolaritá su z, h e g.

È mostrato che allora esiste una unica coppia $(y, f) \in C^1([0,T];X) \times C([0,T];\mathbb{C})$ soluzione di (4). Naturalmente, $\Phi \in X^*$ e $g \in C([0,T];\mathbb{C})$.

I risultati si applicano facilmente al problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(My(t)) + Ly(t) = f(t), & 0 \le t \le T \\ (My)(0) = My_0, & \end{cases} \tag{5}$$

e al problema di identificazione nelle incognite y, f

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(My(t)) + Ly(t) = f(t)z + h(t), & 0 \le t \le T \\ (My)(0) = My_0, & \\ \Phi[My(t)] = g(t), & 0 \le t \le T \end{cases} \tag{6}$$

dove L, M sono operatori lineari chiusi in X, con

$$D(L) \subseteq D(M) \tag{7}$$

e per $\lambda \in \Sigma_\alpha$, $\lambda M - L$ ha un inverso limitato e

$$\|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-\beta} \tag{8}$$

Allora $A = LM^{-1}$ soddisfa (2) e (3).

Le soluzioni di (5) e di (6) sono facilmente ottenute da quelle di (1) e (4).

Ricordiamo che nel lavoro [3], nel caso di A single-valued, l'esistenza e l'unicitá di una soluzione a (1) avente ulteriore regolaritá sono ottenunte supponendo che Ay_0 ed $f(t)$ appartengono a certi spazi intermedi denotati da X_A^θ o $\tilde{X}_A^\theta$ o spazi di interpolazione reale $(X, D(A))_{\theta,\infty}$.

Il punto essenziale è quello di rimpiazzare l'operatore $A(t + A)^{-1}$ e Ae^{-tA}, non ben definiti per una relazione A, con $I - t(t + A)^{-1}$ e $-\frac{d}{dt}e^{-tA}$, rispettivamente. Problemi inversi per equazioni regolari di evoluzione e loro applicazioni alla Fisica Matematica sono ben descritti nella monografia [6]. Problemi di identificazione per equazioni di evoluzione di tipo iperbolico sono considerati nel lavoro [4].

Alla fine, verranno descritte alcune applicazioni ad equazioni alle derivate parziali degeneri.

2. Preliminari

Sia A una relazione lineare nello spazio di Banach complesso X soddisfacente (2) e (3). Allora è mostrato in [5, Chapter III] che $-A$ genera un semigruppo e^{-tA}, $0 < t < \infty$, soddisfacente

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 t^{\frac{\beta-1}{\alpha}}, \quad \|\frac{d}{dt}e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 t^{\frac{\beta-2}{\alpha}}; \tag{9}$$

dalla (9) segue che per $v \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|\frac{d}{dt}e^{-tA}v\|_X &\leq C_0 t^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|v\|_{D(A)} \\ \|\frac{d^2}{dt^2}e^{-tA}v\|_X &\leq C_0 t^{\frac{\beta-2}{\alpha}}\|v\|_{D(A)} \end{aligned} \tag{10}$$

Introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione. *Se* $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned} X_A^\theta &= \{u \in X; |u|_{X_A^\theta} = \sup_{0<t<\infty} t^\theta \|u - t(t+A)^{-1}u\|_X < \infty\} \\ &\|u\|_{X_A^\theta} = \|u\|_X + |u|_{X_A^\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_A^\theta &= \{u \in X; |u|_{\tilde{X}_A^\theta} = \sup_{0<t} t^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}} \|\frac{d}{dt} e^{-tA} u\|_X < \infty\} \\ &\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta} = \|u\|_X + |u|_{\tilde{X}_A^\theta}, \end{aligned}$$

una delle definizioni di $(X, D(A))_{\theta,\infty}$ *è*

$$(X, D(A))_{\theta,\infty} = \{u = u_0(t) + u_1(t), \sup_{0<t<\infty} \|t^\theta u_0(t)\|_X < \infty, \sup_{0<t<\infty} \|t^{\theta-1} u_1(t)\|_{D(A)} < \infty\}$$

e

$$\|u\|_{(X,D(A))_{\theta\infty}} = \inf \max\{\sup_{0<t<\infty} \|t^\theta u_0(t)\|_X, \inf_{0<t<\infty} \|t^{\theta-1} u_1(t)\|_{D(A)}\}$$

al variare di tutte le rappresentazioni di u nella forma suddetta.

Valgono i seguenti lemmi,

Lemma 2.1. *Se* $0 < \theta < 1$*, allora*

$$X_A^\theta \hookrightarrow (X, D(A))_{\theta,\infty}$$

<u>Dimostrazione</u> Ricordiamo che $D(A)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|x\|_{D(A)} = \inf_{y \in Ax} \|y\|_X.$$

Sia $u \in X_A^\theta$. Poniamo $u_0(t) = u - t(t+A)^{-1}u$, $u_1(t) = t(t+A)^{-1}u$. Allora $u = u_0(t) + u_1(t)$, $t \geq 0$ e

$$\begin{aligned} \sup_{0<t<\infty} \|t^\theta u_0(t)\|_X &= \sup_{0<t<\infty} t^\theta \|u - t(t+A)^{-1}u\|_X < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} \|t^{\theta-1} u_1(t)\|_{D(A)} &= \sup_{0<t<\infty} t^\theta \|u - t(t+A)^{-1}u\|_X < \infty. \end{aligned}$$

#

Lemma 2.2. *Se* $0 < \theta < 1$*, allora*

$$(X, D(A))_{\theta,\infty} \hookrightarrow \tilde{X}_A^\theta.$$

Dimostrazione Se $u \in X$, si ha

$$\|\frac{d}{dt}e^{-tA}u\|_X \leq C_0 t^{\frac{\beta-2}{\alpha}}\|u\|_X.$$

Se $u \in D(A)$, ponendo $\varphi \in Au$, risulta

$$\|\frac{d}{dt}e^{-tA}u\|_X = \|\frac{d}{dt}e^{-tA}A^{-1}\varphi\|_X = \|e^{-tA}\varphi\|_X \leq C_0 t^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|\varphi\|_X \tag{11}$$

e cosí

$$\|\frac{d}{dt}e^{-tA}u\|_X \leq C_0 t^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|u\|_{D(A)}. \tag{12}$$

Da (11) e (12), per interpolazione

$$\|\frac{d}{dt}e^{-tA}u\|_X \leq C_0 t^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}}\|u\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} \tag{13}$$

#

Lemma 2.3. *Se* $u \in X$*,* $t > 0$ *e* $\alpha + \beta > 1$*, allora*

$$\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}d\tau = (A+t)^{-1}u.$$

Dimostrazione Scriviamo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A} \quad d\tau &= -\int_0^\infty e^{-t\tau}\frac{d}{d\tau}e^{-\tau A}A^{-1}ud\tau \\ &= A^{-1}u - t\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}A^{-1}ud\tau = A^{-1}(u - t\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}ud\tau)\end{aligned}$$

pertanto

$$\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}d\tau \in D(A) \quad \text{e}$$
$$A\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}d\tau \ni u - t\int_0^\infty e^{-t\tau}e^{-\tau A}d\tau.$$

l'asserzione del lemma segue facilmente. #

3. Il principale risultato concernente il problema (1)

Premettiamo il seguente lemma.

Lemma 3.1. *Sia $\alpha+\beta+\theta>2$. Allora per $u \in (X, D(A))_{\theta,\infty}$, $e^{-tA}u \to u$ per $t \to 0$.*

Se $u \in D(A)$, l'insieme $Au \cap (X, D(A))_{\theta,\infty}$ contiene al massimo un solo elemento.

Dimostrazione Supponiamo $u \in D(A)$ e sia $\varphi \in Au$. Allora

$$e^{-tA}u - u = \int_0^t \frac{d}{d\tau}e^{-\tau A}u d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau}e^{-\tau A}A^{-1}\varphi d\tau = -\int_0^t e^{-\tau A}\varphi d\tau$$

Poiché la nostra assunzione implica $\alpha+\beta>1$, si deduce che

$$\|e^{-tA}u-u\|_X = \|\int_0^t e^{-\tau A}\varphi d\tau\|_X \le C_0\int_0^t \tau^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|\varphi\|_X d\tau = C_0\frac{t^{\frac{\beta-1}{\alpha}+1}}{\frac{\beta-1}{\alpha}+1}\|\varphi\|_X$$

Ció implica

$$\|e^{-tA}u-u\|_X \le C_0\frac{t^{\frac{\beta-1}{\alpha}+1}}{\frac{\beta-1}{\alpha}+1}\|u\|_{D(A)}. \tag{14}$$

D'altra parte, $u \in X$, allora

$$\|e^{-tA}u-u\|_X \le \|e^{-tA}u\|_X + \|u\|_X \le C_0 t^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|u\|_X + \|u\|_X. \tag{15}$$

Allora, per interpolazione, esiste una costante $c>0$ tale che

$$\|e^{-tA}u-u\|_X \le Ct^{\frac{\beta-1}{\alpha}+\theta}\|u\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}}. \tag{16}$$

per $0<t\le 1$.

Poiché

$$\frac{\beta-1}{\alpha}+\theta-\frac{\alpha+\beta+\theta-2}{\alpha}=\frac{(1-\theta)(1-\alpha)}{\alpha}\geq 0$$

si ha

$$\frac{\beta-1}{\alpha}+\theta\geq\frac{\alpha+\beta+\theta-2}{\alpha}>0.$$

Pertanto, la prima asserzione segue. Supponiamo $v\in D(A)$ e $\varphi\in Av\cap(X,D(A))_{\theta,\infty}$. Allora in forza della prima asserzione

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}v=\frac{d}{dt}e^{-tA}A^{-1}\varphi=-e^{-tA}\varphi\to-\varphi,\qquad \text{per } t\to 0.$$

#

Possiamo ora enunciare il Teorema principale.

Teorema 3.1. *Supponiamo* $2\alpha+\beta+\theta>3$ *(*$\Rightarrow 2\alpha+\beta>2$*),* $y_0\in D(A)$*,* $Ay_0\cap(X,D(A))_{\theta,\infty}\neq\emptyset$*,* $f\in C([0,T];X)\cap B(\theta,T)\ (X,D(A))_{\theta,\infty}$*. Allora il problema (1) ammette una unica soluzione* y *tale che*

$$y\in C^1([0,T];X)$$

$$y'-f\in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,T];X).$$

$B(0,T;Y)$ *denota l'insieme delle funzioni limitate (non necessariamente misurabili) a valori su* Y *e definite su* $(0,T)$*.*

Dimostrazione Posto

$$y(t)=e^{-tA}y_0+\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \tag{17}$$

$$y_1(t)=e^{-tA}y_0;\quad y_2(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds,$$

In virtú del Lemma 3.1, $Ay_0\cap(X,D(A))_{\theta,\infty}$ consiste di un singolo elemento $\varphi=-\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}e^{-tA}y_0$. Pertanto,

$$y_1'(t)=\frac{d}{dt}e^{-tA}y_0=\frac{d}{dt}e^{-tA}A^{-1}\varphi=-e^{-tA}\varphi. \tag{18}$$

Per la (13)

$$\|\frac{d}{dt}e^{-tA}\varphi\|_X \le C_1 t^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}}\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} \tag{19}$$

In virtú del Lemma 3.1

$$\lim_{t\to 0} y_1'(t) = -\varphi \tag{20}$$

Facendo uso di (19) otteniamo per $0 \le s < t \le T$,

$$\|y_1'(t) - y_1'(s)\|_X = \| - e^{-tA}\varphi + e^{-sA}\varphi\|_X \le \|\int_s^t \frac{d}{d\delta}e^{-\delta A}\varphi d\delta\|_X$$

$$\le C_1 \int_s^t \delta^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}}\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} d\delta \le C_1 \frac{(t-s)^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}}{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} d\delta$$

poiché $\alpha+\beta+\theta-2 \ge 2\alpha+\beta-3+\theta > 0$.

Cioé $y_1' \in C^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}([0,T];X)$ e, inoltre,

$$\|y_1'\|_{C^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}([0,T];X)} \le \frac{C_1}{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}}, \tag{21}$$

$$\|y_1'(t)\|_{X_A^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}} \le C_1\Gamma(\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha})\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} + \|e^{-tA}\varphi\|_X,$$

stime non banali.

Cosí,

$$\|y_1'(t)\|_{\tilde{X}} \le C_1\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} \tag{22}$$

Si vede poi che, unendo (18), il lemma 2.3, e (22),

$$\|y_1'(t)\|_{X_A^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}} \le C_1\Gamma(\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha})\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} + \|e^{-tA}\varphi\|_X.$$

Pertanto, y_1 ha la seguente regolaritá

$$y_1' \in B(0,T;X_A^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}),$$

$$\|y_1'\|_{B(0,T;X_A^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}})} \le C_1\Gamma(\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha})\|\varphi\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}} + \sup_{0\le t\le T}\|e^{-tA}\varphi\|_X. \tag{23}$$

Resta da vedere che $y_2(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds$ ha le proprietá dichiarate.

In effetti, stime delicate mostrano che

$$y_2' - f \in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,T];X).$$

Questa e (21) portano a

$$y' - f \in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,T];X).$$

Si vede inoltre che

$$y_2' - f \in B(0,T;X_A^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}})$$

e quindi anche, per (23)

$$y' - f \in B(0,T;X_A^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}).$$

Si vede infine che la y definita da (17) soddisfa (1).

Si ha

$$y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) = \frac{d}{dt} e^{-tA} y_0 + f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

e pertanto,

$$A^{-1}y'(t) = A^{-1}\frac{d}{dt} e^{-tA} y_0 + A^{-1}f(t) + \int_0^t A^{-1}\frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

$$= -e^{-tA}y_0 + A^{-1}f(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds.$$

Ció implica che

$$A^{-1}(y'(t) - f(t)) = -e^{-tA}y_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds = -y(t).$$

Da ció (1) segue facilmente e conclude la prova. #

Siano L, M operatori lineari chiusi in X soddisfacenti (7)-(8). Posto $A = LM^{-1}$, $D(A) = M(D(L)) = \{Mu,\ u \in D(L)\}$, $Ay = \{Lu, y = Mu,\ u \in D(L)\}$, si ha:

Teorema 3.2. *Supponiamo $2\alpha + \beta + \theta > 3$, $u_0 \in D(L)$, $Lu_0 \in (X, D(A))_{\theta,\infty}$ e $f \in C([0,T];X) \cap B(X;(X,D(A))_{\theta,\infty})$. Allora esiste una unica soluzione u al problema (5) tale che*

$$Mu \in C^1([0,T];X)$$
$$Lu \in C^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}([0,T];X) \cap B(0,T;X_A^{\frac{2\alpha+\beta-3+\theta}{\alpha}}).$$

Dimostrazione Notiamo che se $y \in D(A) = D(LM^{-1})$,

$$\|y\|_{D(A)} = \inf\{\|Lu\|_X;\ y = Mu,\ u \in D(L)\}$$

Posto $y_0 = Mu_0$, allora $y_0 \in D(A)$ e, per ipotesi, $Lu_0 \in Ay_0 \cap (X, D(A))_{\theta,\infty}$. Pertanto, esiste una unica soluzione y al problema (1). Poniamo

$$u(t) = L^{-1}(f(t) - y'(t))$$

Allora

$$Lu(t) = f(t) - y'(t) \in Ay(t) = LM^{-1}y(t) \tag{24}$$

Poiché L è invertibile, ció implica che $u(t) \in M^{-1}y(t)$. Cosí, $y(t) = Mu(t)$. Sostituendo questa equazione nella prima parte di (24), otteniamo

$$Lu(t) = f(t) - \frac{d}{dt}(Mu(t))$$

Le restanti asserzioni sono ovvie. #

4. Un problema di identificazione per

$$y'(t) - f(t)z - h(t) \in Ay(t).$$

Teorema 4.1. *Supponiamo $2\alpha + \beta - 3 + \theta > 0$, $y_0 \in D(A)$, $Ay_0 \cap (X, D(A))_{\theta,\infty} \neq \emptyset$, $h \in C([0,T]; X) \cap B(0,T; (X, D(A))_{\theta,\infty})$, $g \in C^1([0,T]; \mathbb{C})$ $\Phi \in X^*$, $\Phi[y_0] = g(0)$, $\Phi[z] \neq 0$. Allora il problema (2)-(4) ammette una unica soluzione*

Dimostrazione Supponiamo $f \in C([0,T]; \mathbb{C})$. Allora definiamo la funzione y mediante

$$y(t) = e^{-tA}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}zf(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}h(s)ds. \tag{25}$$

per il Lemma 3.1 e la (13) sappiamo

$$e^{-tA}z \to z,\ \text{per } t \to 0,\quad \|\frac{d}{dt}e^{-tA}z\|_X \leq C_1 t^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}} \tag{26}$$

Pertanto, $\int_0^t e^{-(t-s)A}zf(s)ds$ è differenziabile e

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} z f(s)ds = f(t)z + \int_0^t f(s)\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} z ds. \tag{27}$$

Si nota inoltre che anche $\int_0^t e^{-(t-s)A}h(s)ds$ è differenziabile e

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} h(s)ds = h(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} h(s)ds. \tag{28}$$

$$\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} h(s)ds\|_X \le C_1 \frac{t^{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}}{\frac{\alpha+\beta-2+\theta}{\alpha}}. \tag{29}$$

Pertanto, y è differenziabile, $\|h\|_{B(0,T;(X,D(A)_{\theta,\infty))}}$ è finita

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}e^{-tA}y_0 + f(t)z + \int_0^t f(s)\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} z ds + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} h(s)ds. \tag{30}$$

Assumendo che $y(t)$ soddisfa (4) si dedudece la seguente identitá:

$$g'(t) = \Phi[\frac{d}{dt}e^{-tA}y_0] + f(t)\Phi[z] + \int_0^t f(s)\Phi[\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} z]ds + \Phi[\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} h(s)ds]. \tag{31}$$

Cioé, abbiamo ottenuto la seguente equazione integrale

$$f(t) + \mathcal{X}\int_0^t f(s)\Phi[\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)A} z]ds = \mathcal{X}g'(t) - \mathcal{X}\Phi[\frac{d}{dt}e^{-tA}y_0] - \mathcal{X}\Phi[\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} h(s)ds]. \tag{32}$$

dove $\mathcal{X} = \Phi[z]^{-1}$. Posto

$$h(t) = \mathcal{X}\Phi[\frac{d}{dt}e^{-tA}z]$$

$$\psi(t) = \mathcal{X}g'(t) - \mathcal{X}\Phi[\frac{d}{dt}e^{-tA}y_0] - \mathcal{X}\Phi[\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A} h(s)ds]$$

allora (32) è scritta come

$$f(t) + \int_0^t h(t-s)f(s)ds = \psi(t).$$

o brevemente,

$$f + h * f = \psi \tag{33}$$

In forza di (26)

$$|h(t)| \leq C_1|\mathcal{X}|\|\Phi\|t^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}\|z\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}}}$$

In virtú di (20), (28) e (29), si osserva che $\psi \in C([0,T];\mathbb{C})$. Sia r la soluzione della equazione integrale

$$h + r + r * h = 0$$

Questa equazione è risolta per approssimazioni successive e la soluzione r soddisfa

$$|r(t)| \leq C_2 t^{\frac{\beta-2+\theta}{\alpha}}, \quad C_2 > 0$$

e l'equazione integrale (33) ammette una unica soluzione $f \in C([0,T];\mathbb{C})$ data da

$$f = \psi + r * \psi$$

o

$$f(t) = \psi(t9 + \int_0^t r(t-s)\psi(s)ds \tag{34}$$

È facile verificare che se definiamo y in (25) con questa f, la coppia (y,f) soddisfa e due prime relazioni in (4). Da (30) e (31) segue che

$$g'(t) = \Phi[\frac{d}{dt}y(t)] = \frac{d}{dt}\Phi[y(t)]$$

Da ció e dalla condizione di compatibilitá $\Phi[y_0] = g(0)$, (4) segue. #

5. Applicazioni.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^2, $1 < p < \infty$. Sia

$$\mathcal{L} = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x)$$

un operatore differenziale del secondo ordine tale che a_{ij}, $\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}$, a_i, $\frac{\partial}{\partial x_i}a_i$, $a_0 \in C(\bar{\Omega})$, $i,j = 1\ldots n$, $\{a_{ij}(x)\}$ è una matrice simmetrica definita positiva e $\forall x \in \bar{\Omega}$,

$$a_0(x) \geq C_1, \quad a_0(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x) \geq C_1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad C_1 > 0.$$

Sia $b^0 \in C(\partial\Omega)$, a valori reali,

$$b^0 \geq 0, \quad b^0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\nu_j(x) \geq 0,$$

per $x \in \partial\Omega$, dove $\nu = (\nu_1 \ldots, \nu_n)$ è il vettore normale esterno a $\partial\Omega$. Introduciamo l'operatore L_p che è la realizzazione in $L^p(\Omega)$ di $\mathcal{L}$ con condizioni al bordo di tipo Robin.

$$D(L_p) = \{u \in W^{2,p}(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot)\nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_+ b^0(\cdot)u = 0, \quad \text{in } \partial\Omega\}$$

Se $m(x) \geq 0$ è limitata misurabile su $\bar{\Omega}$, sia M_p l'operatore di moltiplicazione per $m(\cdot)$ in $L^p(\Omega)$. Assumiamo che $m \in C^1(\bar{\Omega})$ e

$$|\nabla u(x)| \leq C^0 m(x)^\rho, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$\nabla u = (\frac{\partial}{\partial x_1} u \ldots, \frac{\partial}{\partial xn} u)$, dove $\rho > 0$ e

$$2 - p < \rho < 1$$

È mostrato in FLT [3] che

$$\|M_p(zM_p + L_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq C_{1,p}(1 + |z|)^{-(2-\rho)^{-1}}, \ p \leq 2$$

$$\|M_p(zM_p + L_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq C_{2,p}(1 + |z|)^{-2[p(2-\rho)]^{-1}}, \ p > 2$$

Allora tutti i risultati astratti si applicano alle equazioni corrispondenti, concernenti sia i problemi diretti che inversi.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, Direct and Inverse degenerate parabolic differential and integro-differential equations with multivalued operators, preprint.

[2] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, Degenerate integro-differential equations of parabolic type with Robin boundary conditions: L^p-theory, preprint.

[3] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, Direct and inverse problems for system of singular differential boundary-value problems, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 225, pp. 1–34.

[4] A. Favini, G. Marinoschi, Identification for degenerate problems of hyperbolic type, in PDE's, Semigroup Theory, Inverse and Control Problems, edited by A. Favini and A. Lorenzi, Journal Applicable Analysis , vol. 91, no. 8 (2012), pp. 1511–1527.

[5] A. Favini, A. Yagi, Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[6] I. Prilepko, G. Orlovsky, A. Vasin, Methods for solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

E-mail address: `angelo.favini@unibo.it`

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, piazza di Porta San Donato 5, 40126, Bologna.