A PRIORI ESTIMATES FOR NONVARIATIONAL OPERATORS MODELED ON HÖRMANDER'S VECTOR FIELDS WITH DRIFT
STIME A PRIORI PER OPERATORI NON VARIAZIONALI MODELLATI SU CAMPI DI HÖRMANDER CON DRIFT

MARCO BRAMANTI

SOMMARIO. For a nonvariational operator structured on Hörmander's vector fields with drift, where the matrix of coefficients is real, symmetric and uniformly positive, we prove local a priori estimates on the second order derivatives with respect to the vector fields, in Hölder spaces if the coefficients are Hölder continuous, in L^p spaces if the coefficients are bounded, measurable and locally VMO.

SUNTO. Per un operatore non variazionale strutturato su campi di Hörmander con drift, con matrice dei coefficienti reale, simmetrica e uniformemente definita positiva, proviamo stime a priori locali sulle derivate seconde rispetto ai campi, in spazi di Hölder se i coefficienti sono Hölderiani, in spazi L^p se i coefficienti sono misurabili, limitati e localmente VMO.

2010 MSC. Primary 35H20. Secondary: 35B45, 42B20, 53C17.

KEYWORDS. Hörmander's vector fields, Schauder estimates, L^p estimates, drift

1. INTRODUZIONE

In questo seminario si discutono risultati ottenuti in collaborazione con Maochun Zhu, della Northwestern Polytechnical University (P.R. China) e contenuti nei lavori [9], [10]. Consideriamo una famiglia di campi vettoriali reali lisci

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\,\partial_{x_j}, \quad i = 0, 1, 2, ..., q$$

$(q + 1 < n)$ definiti in un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ e soddisfacenti la condizione di Hörmander: l'algebra di Lie generata dagli X_i in ogni punto di Ω è $\mathbb{R}^n$. Sotto queste

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2013) pp. 15–37

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

ISSN 2240-2829.

ipotesi è noto che l'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{q} X_i^2 + X_0$$

è ipoellittico (Hörmander [17], 1967). Nel 1976 Rothschild-Stein [21] provarono stime a priori di tipo L^p per le derivate seconde rispetto ai campi vettoriali, cioè

$$\sum_{i,j=1}^{q} \|X_i X_j u\|_{L^p(\Omega')} + \|X_0 u\|_{L^p(\Omega')} \leq c \left\{ \|\mathcal{L}u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{q} \|X_i u\|_{L^p(\Omega)} \right\}$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, $\Omega' \Subset \Omega$. Si noti che nella stima il campo vettoriale di "drift" X_0 ha peso due rispetto ai campi X_i per $i = 1, 2, ..., q$. Per operatori senza il termine di drift ("somme di quadrati" di Hörmander) la letteratura esistente è molto più vasta che per operatori generali. D'altro canto esistono classi di operatori completi dotate di indubbio interesse, come gli operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck, il cui studio nel contesto della teoria degli operatori di Hörmander costituisce un filone vivace di ricerche, iniziato col lavoro di Lanconelli-Polidoro [18], 1994.

E' ben noto che lo studio di un operatore di Hörmander è molto facilitato nei casi in cui esiste una struttura di gruppo di Lie rispetto al quale l'operatore è invariante per traslazioni, ed eventualmente anche omogeneo per una famiglia di dilatazioni. Se entrambe le proprietà valgono (ciò che si esprime dicendo che siamo su un *gruppo omogeneo*), un famoso risultato di Folland [14], 1975, garantisce l'esistenza di una soluzione fondamentale globale Γ per $\mathcal{L}$, invariante per traslazioni e omogenea, che rende agevole la dimostrazione delle stime a priori di tipo L^p sulla base di opportune versioni astratte della teoria degli integrali singolari. Le stime di Rothschild-Stein furono appunto ottenute riconducendosi opportunamente a questa situazione modello, con un procedimento di *lifting* e *approssimazione* a cui accenneremo in seguito.

A partire dal 2000 circa sono state studiate anche certe classi di operatori nonvariazionali strutturati su campi di Hörmander, dei tipi

$$\mathcal{L}=\sum_{i,j=1}^{q}a_{ij}\left(x\right)X_{i}X_{j} \tag{1}$$

$$\mathcal{L}=\sum_{i,j=1}^{q}a_{ij}\left(x,t\right)X_{i}X_{j}-\partial_{t} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}=\sum_{i,j=1}^{q}a_{ij}\left(x\right)X_{i}X_{j}+X_{0} \tag{3}$$

dove la matrice $\{a_{ij}\left(\cdot\right)\}_{i,j=1}^{q}$ è simmetrica e uniformemente definita positiva, i coefficienti sono limitati e soddisfano ipotesi deboli di regolarità, per esempio appartengono a spazi di Hölder o VMO definiti rispetto alla distanza indotta dai campi vettoriali. Poiché in questi casi gli a_{ij} non sono C^{∞}, questi operatori del second'ordine non sono più ipoellittici, ma ha comunque senso chiedersi se (ed aspettarsi che) stime a priori per le derivate seconde rispetto ai campi continuino a valere, dal momento che queste non richiedono per aver senso una grande regolarità dei coefficienti. Precisamente: stime a priori L^{p} (con a_{ij} in $VMO_{X}\cap L^{\infty}$) sono state dimostrate da Bramanti-Brandolini [3] per operatori (1) e in [2] per operatori (3) ma sui gruppi omogenei; stime a priori in spazi C_{X}^{α} (con a_{ij} in C_{X}^{α}) sono state dimostrate da Bramanti-Brandolini in [5] per operatori (2) e da Gutierrez-Lanconelli in [16] per operatori (3) ma sui gruppi omogenei. Notiamo esplicitamente che il lavoro di Rothschild-Stein non conteneva stime in spazi di Hölder adattati ai campi perché nel 1976 la stessa nozione di distanza indotta dai campi non era ancora stata studiata per campi generali.

Nel caso particolare di operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck che si scrivono

$$\mathcal{L}=\sum_{i,j=1}^{q}a_{ij}\left(x\right)\partial_{x_{i}x_{j}}^{2}+X_{0}$$

per un opportuno termine di drift X_{0}, stime L^{p} (con a_{ij} in $VMO_{X}\cap L^{\infty}$) sono state provate da Bramanti-Cerutti-Manfredini in [7] nei gruppi omogenei, stime L^{p} (con a_{ij} uniformemente continui) globali nello spazio e per tempi limitati sono state provate da Bramanti-Cupini-Lanconelli-Priola in [8] in presenza di traslazioni ma non dilatazioni, mentre stime C_X^α sono state provate da Di Francesco-Polidoro [13] ancora in presenza di traslazioni ma non necessariamente dilatazioni.

Lo scopo della presente ricerca è provare stime locali sia L^p che C_X^α per operatori generali (3) strutturati su campi di Hörmander "con drift", senza assumere l'esistenza di una struttura di gruppo. Precisamente, proviamo che

$$\|u\|_{S_X^{2,p}(\Omega')} \leq c\left\{\|\mathcal{L}u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right\}$$

per $p \in (1,\infty)$, $\Omega' \Subset \Omega$, se i coefficienti sono $VMO_{X,loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, e

$$\|u\|_{C_X^{2,\alpha}(\Omega')} \leq c\left\{\|\mathcal{L}u\|_{C_X^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}$$

per $\alpha \in (0,1)$, $\Omega' \Subset \Omega$ se i coefficienti sono $C_X^\alpha(\Omega)$. Gli spazi di Sobolev e di Hölder $S_X^{2,p}, C_X^{2,\alpha}$ sono quelli indotti dai campi vettoriali X_i e dalla relativa distanza, sempre pesando 2 il campo X_0. Ovviamente questi risultati generalizzano quelli contenuti nei vari lavori sopra citati.

Queste stime non costituiscono un'estensione immediata delle teorie esistenti, per varie difficoltà tecniche, qualcuna delle quali illustreremo nel seguito. Inoltre, il lavoro di Rothschild-Stein [21] a cui si devono inizialmente molte delle idee di questo filone di ricerca, non contiene dimostrazioni esplicite per il caso del drift. Perciò in effetti questa ricerca si configura non solo come un'estensione dei risultati noti, ma anche come una prima stesura dettagliata di certi argomenti di [21] per il caso del drift. Infine, questa teoria ha reso necessario un ripensamento delle tecniche di analisi reale (spazi localmente doubling, v. [10]) che ha un interesse indipendente e getta inoltre una diversa luce anche su certi risultati che erano già noti per gli operatori nonvariazionali, permettendo di formulare le ipotesi sui coefficienti in modo più naturale, in vista del carattere locale delle stime a priori.

Facciamo una mappa del percorso generale che si segue per provare le stime a priori, prima di entrare in qualche dettaglio.

1. Lifting e approssimazione. A partire dall'operatore differenziale di partenza $\mathcal{L}$ se ne definisce un altro $\widetilde{\mathcal{L}}$ di forma simile ma che vive in uno spazio ambiente di dimensione

maggiore e i cui campi sono ben approssimati localmente da campi omogenei e invarianti rispetto ad una struttura di gruppo omogeneo.

2. Nello spazio delle variabili liftate si scrivono formule di rappresentazione per u e $\widetilde{X}_i\widetilde{X}_j u$ in termini di $\widetilde{L}u$, usando una parametrice.

3. Si applica la teoria degli integrali singolari astratta per ottenere dalle formule di rappresentazione stime a priori sulle derivate seconde di funzioni regolari a supporto compatto piccolo, in L^p o in C^{α}_X.

4. Dalle stime precedenti si ricavano stime su sfere piccole ma per funzioni anche a supporto non compatto, con tecniche di funzioni cutoff e disuguaglianze di interpolazione per le norme delle derivate prime.

5. Si ritorna alle variabili originarie proiettando opportunamente le stime e si ottengono stime su sfere piccole nello spazio originario e, per copertura, stime all'interno di un dominio limitato qualsiasi.

Uno degli aspetti qualificanti di questo approccio è quello di fare un unico investimento iniziale (ossia i punti 1 e 2 e un'impostazione comune della teoria degli integrali singolari L^p e C^α) per ottenere poi le due teorie L^p e C^α in parallelo (punti 3, 4, 5). Vediamo ora qualche dettaglio in più sui singoli punti, soffermandoci su qualcuna delle difficoltà.

2. Lifting e approssimazione

Dati i campi vettoriali $X_0, X_1, \ldots, X_q$ reali C^∞, definiti in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ $(q+1<n)$, assegniamo a X_0 il peso 2, agli altri X_i peso 1, e per ogni multiindice

$$I = (i_1, i_2, ..., i_k), \quad 0 \le i_j \le q$$

definiamo il suo peso $|I|$ come la somma dei pesi. Poniamo:

$$X_{[I]} = \left[X_{i_1}, \left[X_{i_2}, \ldots \left[X_{i_{k-1}}, X_{i_k}\right] \ldots\right]\right],$$

dove $[X,Y] = XY - YX$, e diciamo che $X_{[I]}$ è un *commutatore di peso* $|I|$. Diciamo che il sistema $X = \{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$ soddisfa la *condizione di Hörmander di peso* s se questi campi vettoriali, insieme ai loro commutatori di peso $\le s$, generano lo spazio tangente in ogni punto $x \in \Omega$.

Il famoso teorema di Lifting di Rothschild-Stein in [21, p. 272] afferma:

Teorema 2.1. *Sotto le ipotesi precedenti, per ogni* $\overline{x} \in \Omega$ *esiste un intero* $N > n$ *ed esistono nuovi campi vettoriali*

$$\widetilde{X}_i = X_i + \sum_{l=n+1}^{N} \lambda_{il}(x,t) \frac{\partial}{\partial t_l}, \quad i = 0, \dots, q$$

con $\lambda_{il}(x,t)$ *funzioni regolari* $(0 \le i \le q,\ n+1 \le l \le N,\ t = t_{n+1}, \dots, t_N)$*, definiti in un intorno* $\widetilde{U}$ *di* $\overline{\xi} = (\overline{x}, 0) \in \mathbb{R}^N$ *tali che i campi vettoriali* $\widetilde{X}_i$ *soddisfano ancora la condizione di Hörmander di peso* s *e inoltre sono* liberi al passo s *in ogni punto di* $\widetilde{U}$.

Non ricordiamo qui la definizione di campi liberi. E' sufficiente sapere che in forza di questa loro proprietà vale il teorema di approssimazione, per introdurre il quale dobbiamo prima ricordare alcune definizioni. Un *gruppo omogeneo in* $\mathbb{R}^N$ è un gruppo di Lie $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ\right)$ ("traslazioni") rispetto a cui l'origine è l'identità e l'inverso è l'opposto euclideo, dotato di una famiglia di automorfismi ("dilatazioni")

$$D(\lambda)\,(u_1, u_2, ..., u_N) = (\lambda^{\alpha_1} u_1, \lambda^{\alpha_2} u_2, ..., \lambda^{\alpha_N} u_N,)$$

per opportuni esponenti positivi α_i. Si può definire in $\mathbb{G}$ una *norma omogenea* $\|\cdot\|$ ponendo

$$\|u\| = r \quad \Leftrightarrow \quad \left| D\left(\frac{1}{r}\right) u \right| = 1,$$

dove $|\cdot|$ è la norma Euclidea e $\|0\| = 0$. La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ è invariante rispetto a $\mathbb{G}$ e si ha

$$|B\,(u,r)| = |B\,(u,1)|\, r^Q \quad \forall u \in \mathbb{G}, r > 0,$$

dove $Q = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ si dice *dimensione omogenea del gruppo.*

Supporremo che esista una base dell'algebra di Lie dei campi invarianti a sinistra $Y_0, Y_1, ..., Y_q$, con Y_0 omogeneo di grado 2, gli altri Y_i omogenei di grado 1. Allora $\mathbb{G}$ si dice *gruppo omogeneo di tipo II.*

Un operatore differenziale su $\mathbb{G}$ si dice *di grado locale* $\le \lambda$ se, prendendo lo sviluppo di Taylor nell'origine dei suoi coefficienti, ogni termine così ottenuto è un operatore differenziale omogeneo di grado $\le \lambda$. Con queste premesse vale il seguente teorema di approssimazione di Rothschild-Stein:

Teorema 2.2. *Dati i campi liftati $\widetilde{X}_i$ come nel Teorema 2.1, esiste nello spazio $\mathbb{R}^N$ di questi campi un gruppo omogeneo $\mathbb{G}$ di tipo II, campi invarianti omogenei Y_i come sopra, ed esiste per ogni η in un opportuno intorno di $\overline{\xi}$ (punto di lifting) un diffeomorfismo $\Theta_\eta(\cdot)$ di un intorno di η in un intorno dell'origine tale che, ponendo $\Theta(\eta,\xi) = \Theta_\eta(\xi)$, si ha, per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, $i = 0, 1, 2, ..., q$*

$$\widetilde{X}_i \left[f \left(\Theta \left(\eta, \cdot \right) \right) \right] (\xi) = \left(Y_i f + R_i^\eta f \right) \left(\Theta \left(\eta, \xi \right) \right)$$

dove R_i^η è un campo vettoriale di grado locale ≤ 0 per $i = 1, \ldots, q$ (≤ 1 per $i = 0$) dipendente con regolarità da η.

La mappa Θ soddisfa inoltre varie altre proprietà, in particolare

$$\Theta \left(\eta, \xi \right) = -\Theta \left(\xi, \eta \right),$$

e la funzione

$$\rho(\eta, \xi) = \left|\left| \Theta \left(\eta, \xi \right) \right|\right|$$

è una *quasidistanza*, ossia è positiva, simmetrica e

$$\rho(\eta, \xi) \leq c \left[\rho(\eta, \zeta) + \rho(\zeta, \xi) \right].$$

Osserviamo che una dimostrazione dettagliata dei teoremi di lifting, approssimazione e proprietà della mappa Θ che tenga esplicitamente conto della presenza di un campo X_0 di peso 2 non si trova in [21] ma è stata scritta recentemente in [6], nel contesto di campi non regolari.

Applichiamo ora la teoria precedente al nostro operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j + X_0.$$

Per ogni $\overline{x} \in \Omega$ definiamo i campi liftati $\widetilde{X}_i$ in un intorno $\widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)$ di $\overline{\xi} = (\overline{x}, 0) \in \mathbb{R}^N$. Per $\xi = (x, t) \in \widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)$, poniamo

$$\widetilde{a}_{ij}(x, t) = a_{ij}(x),$$

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi) \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j + \widetilde{X}_0$$

Ora congeliamo $\widetilde{\mathcal{L}}$ in un punto $\xi_0 \in \widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)$ e consideriamo l'operatore liftato congelato:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0 = \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi_0)\widetilde{X}_i\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_0$$

e il suo approssimante sul gruppo omogeneo $\mathbb{G}$:

$$\mathcal{L}_0^* = \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi_0)Y_iY_j + Y_0$$

come pure il trasposto:

$$\mathcal{L}_0^{*T} = \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi_0)Y_iY_j - Y_0.$$

Agli operatori $\mathcal{L}_0^*$ e $\mathcal{L}_0^{*T}$ si applicano la teoria di Folland [14], riassunta nel:

Teorema 2.3. *(Sia $Q \geq 3$). Per ogni $\xi_0 \in \widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)$ l'operatore $\mathcal{L}_0^*$ ha un'unica soluzione fondamentale $\Gamma(\xi_0; \cdot)$ tale che:*

(a) $\Gamma(\xi_0; \cdot) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$;

(b) $\Gamma(\xi_0; \cdot)$ *è omogenea di grado* $(2 - Q)$;

(c) per ogni funzione test f e $v \in \mathbb{R}^N$,

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma\left(\xi_0\,;\, u^{-1} \circ v\right)\, \mathcal{L}_0^* f(u)\, du;$$

inoltre per ogni $i, j = 1, \ldots, q$, esistono costanti $\alpha_{ij}(\xi_0)$ tali che

$$Y_iY_j\, f(v) = P.V. \int_{\mathbb{R}^N} Y_iY_j\Gamma\left(\xi_0;\, u^{-1} \circ v\right)\, \mathcal{L}_0^* f(u) du + \alpha_{ij}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}_0^* f(v)$$

dove: $P.V. \int_{\mathbb{R}^N} (...)\, du = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|u^{-1} \circ v\| > \varepsilon} (...)\, du$;

(d) $Y_iY_j\Gamma(\xi_0\,; \cdot)$ *è omogenea di grado* $-Q$;

(e) $\forall R > r > 0$,

$$\int_{r < \|u\| < R} Y_iY_j\Gamma(\xi_0;\, u)\, du = \int_{\|u\| = 1} Y_iY_j\Gamma(\xi_0;\, u)\, d\sigma(u) = 0.$$

Osservazione 2.1. *E' noto che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_0^{*T}$ è*

$$\Gamma^T(\xi_0; u) = \Gamma\left(\xi_0; u^{-1}\right) = \Gamma(\xi_0; -u).$$

(Tuttavia $Y_i\Gamma^T(\xi_0; u) \neq \pm Y_i\Gamma(\xi_0; -u)$).

Poniamo, per $i, j = 1, \dots, q$,

$$\Gamma_{ij}(\xi_0; u) = Y_i Y_j \left[\Gamma(\xi_0; \cdot)\right](u); \qquad \Gamma^T_{ij}(\xi_0; u) = Y_i Y_j \left[\Gamma^T(\xi_0; \cdot)\right](u).$$

Valgono le seguenti stime uniformi:

Teorema 2.4. *(v. [2, Thm. 12]) Per ogni multiindice β esiste una costante $c = c(\beta, \mathbb{G}, \mu)$ tale che*

$$\sup_{\substack{\|u\|=1 \\ \xi \in \widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{\beta} \Gamma_{ij}\left(\xi\, ;\, u\right) \right| \leq\ c,$$

$$\sup_{\xi \in \widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R\right)} |\alpha_{ij}(\xi)| \leq c$$

per ogni $i, j = 1, \dots, q$. Lo stesso vale per Γ^T.

L'idea è ora usare come parametrice dell'operatore liftato $\widetilde{\mathcal{L}}_0$ la funzione

$$\Gamma\left(\xi_0, \Theta\left(\eta, \xi\right)\right),$$

analogamente a quanto fanno Rothschild-Stein. Infatti, formalmente, per il teorema di approssimazione si ha:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0 \left[\Gamma\left(\xi_0, \Theta\left(\eta, \cdot\right)\right)\right](\xi) = \delta_\eta\left(\xi\right) + \left(R^\eta \Gamma\right)\left(\xi_0, \Theta\left(\eta, \xi\right)\right)$$

con R^η operatore differenziale di grado locale $\leq\ 1$, quindi $\left(R^\eta \Gamma\right)\left(\xi_0, \Theta\left(\eta, \xi\right)\right)$ nucleo localmente integrabile.

3. Formule di rappresentazione

Si definisce l'operatore integrale

$$P^*(\xi_0) f(\xi) = -\frac{a(\xi)}{c(\xi)} \int_{\widetilde{B}} \Gamma^T(\xi_0; \Theta(\eta, \xi))\, b(\eta)\, f(\eta)\, d\eta$$

e si calcola, utilizzando il teorema di approssimazione,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0^T P^*(\xi_0) f\left(\xi\right) = a\left(\xi\right) f\left(x\right) + \left(\text{operatori integrali non singolari applicati a } f\right).$$

Trasponendo questa identità si trova

$$aI = P(\xi_0)\widetilde{\mathcal{L}}_0 + \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi_0) S_{ij}(\xi_0) + S_0(\xi_0)$$

dove

$$P(\xi_0)f(\xi) = -b(\xi) \int_{\widetilde{B}} \frac{a(\eta)}{c(\eta)} \Gamma(\xi_0; \Theta(\eta, \xi)) f(\eta)\, d\eta$$

mentre $S_{ij}(\xi_0), S_0(\xi_0)$ sono operatori "congelati di tipo 1", cioè operatori integrali la cui parte principale è del tipo

$$\int_{\widetilde{B}} a(\eta) Y_i \Gamma(\xi_0; \Theta(\xi, \eta)) b(\xi) f(\eta)\, d\eta.$$

Occorre definire con precisione il concetto di operatore di tipo λ. In sostanza è un operatore integrale il cui nucleo è ottenuto a partire da $\Gamma(\xi_0; \Theta(\xi, \eta))$ calcolando eventuali derivate del nucleo; si dice di tipo λ se possiamo derivarlo ancora λ volte prima che il nucleo diventi singolare; perciò $P(\xi_0)$ è di tipo 2; gli operatori di tipo 0 sono integrali singolari. Occorre studiare le proprietà di questi operatori: mostrare cosa si ottiene calcolando derivata di un operatore di tipo λ, il trasposto di un operatore di tipo λ, la composizione di un operatore di tipo λ con una derivata. Infatti l'idea è ora partire dall'identità

$$(af)(\xi) = P^{(2)}(\xi_0)\widetilde{\mathcal{L}}_0 f(\xi) + \sum_{i,j=1}^{q} \widetilde{a}_{ij}(\xi_0) S_{ij}^{(1)}(\xi_0) f(\xi) + S_0^{(1)}(\xi_0) f(\xi)$$

(gli apici (2) e (1) ricordano il tipo di operatore) e prenderne la derivata $\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j$ ottenendo

$$\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j (af)(\xi) = \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j P^{(2)}(\xi_0)\widetilde{\mathcal{L}}_0 f(\xi) + (\text{resto})$$

dove $\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j P^{(2)}(\xi_0)$ sarà un operatore congelato di tipo zero (=integrale singolare) mentre il resto è la derivata seconda di un operatore di tipo 1, cioè *la derivata prima di un integrale singolare*, che vorremmo riscrivere come *operatore di tipo zero applicato a una derivata prima di* f.

Questo "teorema di scambio" è una delle parti delicate della teoria di Rothschild-Stein, che gli autori non trattano nel caso in cui c'è il termine di drift, e che non si può trattare in modo completamente analogo. Il loro teorema, valido se non c'è il drift, è:

Per ogni operatore $S(\xi_0)$ congelato di tipo 1, per ogni $i = 1, 2, ..., q$, esistono altri operatori $T_{ij}(\xi_0), T_i(\xi_0)$ di tipo 1 tali che

$$\widetilde{X}_i S(\xi_0) = \sum_{j=1}^{q} S_{ij}(\xi_0) \widetilde{X}_j + S_i(\xi_0).$$

In presenza di un termine di drift questa proprietà non può essere vera. La variante che dimostriamo è:

Teorema 3.1. *Se $S(\xi_0)$ è un operatore congelato di tipo 1, $i = 1, 2 \dots q$, allora*

$$\widetilde{X}_i S(\xi_0) = \sum_{j=1}^{q} S_{ij}(\xi_0) \widetilde{X}_j + \sum_{h,j=1}^{q} \widetilde{a}_{hj}(\xi_0) S_i^h(\xi_0) \widetilde{X}_j + S_0^i(\xi_0) + P^i(\xi_0) \widetilde{\mathcal{L}}_0,$$

dove $S_{ij}(\xi_0), S_i^h(\xi_0), S_0^i(\xi_0)$ sono operatori congelati di tipo 1, $P^i(\xi_0)$ è di tipo 2.

Grazie allo studio delle proprietà degli operatori di tipo λ e a questa formula di scambio si dimostrano così le formule di rappresentazione per le derivate seconde. Omettendo di scrivere i coefficienti $\widetilde{a}_{hj}(\xi_0)$ dell'operatore per rendere la scrittura più leggibile si ha:

Teorema 3.2 (Formule di rappresentazione adatte a stime Hölderiane)**.** *Esistono operatori congelati di tipo 0, $T_{ij}(\xi_0)$, $T_{ij}^k(\xi_0)$, $T_{ij}^0(\xi_0)$ tali che per ogni funzione test u, $i, j = 1, ..., q$ vale l'identità:*

$$\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j (au) = T_{ij}(\xi_0) \widetilde{\mathcal{L}}_0 u + \sum_{k=1}^{q} T_{ij}^k(\xi_0) \widetilde{X}_k u + T_{ij}^0(\xi_0) u.$$

A questo punto prendendo le norme C_X^α di ambo i membri de questa formula di rappresentazione e scrivendo

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0 u(\xi) = \widetilde{\mathcal{L}} u(\xi) + \sum_{h,k=1}^{q} [\widetilde{a}_{hk}(\xi_0) - \widetilde{a}_{hk}(\xi)] \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u$$

ci si riconduce a teoremi di continuità C_X^α di integrali singolari. Per una funzione u a supporto piccolo il termine $\sum_{h,k=1}^{q} [\widetilde{a}_{hk}(\xi_0) - \widetilde{a}_{hk}(\xi)] \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u$ avrà norma C_X^α piccola grazie alla piccola oscillazione dei coefficienti Hölderiani e si potrà riassorbire a sinistra.

Per provare stime L^p oltre a riscrivere $\widetilde{\mathcal{L}}_0 u(\xi)$ come sopra occorre anche scongelare la variabile ξ_0. Si ottiene così una formula che coinvolge ora operatori (non più congelati) di tipo 0, cioè aventi nuclei singolari del tipo

$$Y_i Y_j \Gamma(\xi; \Theta(\xi, \eta))$$

e coinvolge inoltre i commutatori di questi operatori di integrale singolare con i coefficienti $\widetilde{a}_{hk}$. In forma compatta la formula di rappresentazione che si ottiene è la seguente:

Teorema 3.3 (Formula di rappresentazione adatta a stime L^p)**.** *Esistono operatori di tipo* 0, T_{ij}, T_{ij}^k, T_{ij}^0 *tali che per ogni funzione test* u, $i, j = 1, ..., q$ *vale l'identità:*

$$\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j (au) = T_{ij} \widetilde{\mathcal{L}} u + \sum_{h,k=1}^{q} [\widetilde{a}_{hk}, T_{ij}] \, \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u + \sum_{k=1}^{q} T_{ij}^k \widetilde{X}_k u + T_{ij}^0 u$$

dove

$$[a, T] f = aTf - T(af)$$
$$[a, T] f(\xi) = PV \int k(\xi, \eta) [a(\xi) - a(\eta)] f(\eta) \, d\eta$$

se k *è il nucleo di* T*.*

Ora si prende la norma L^p di ambo i membri e si sfrutta la continuità L^p degli integrali singolari. Si troverà anche la norma L^p del commutatore $[\widetilde{a}_{hk}, T_{ij}] \, \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u$, che nell'ipotesi di coefficienti $\widetilde{a}_{hk} \in VMO$ sarà piccola su sfere piccole, grazie a un opportuno teorema sul commutatore di integrali singolari che, data la funzione $\widetilde{a}_{hk} \in VMO$, garantisce l'esistenza, per ogni $\varepsilon > 0$, di un numero r tale che

$$\left\| [\widetilde{a}_{hk}, T_{ij}] \, \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u \right\|_{L^p} \leq \varepsilon \left\| \widetilde{X}_h \widetilde{X}_k u \right\|_{L^p} \text{ purché } u \in C_0^\infty (B_r) \, .$$

Veniamo quindi come ci si procura la necessaria teoria degli integrali singolari.

4. Applicazione della teoria degli integrali singolari astratta

Occorre ora guardare più da vicino la geometria dei campi vettoriali. Seguendo Nagel-Stein-Weinger [19] definiamo la distanza di controllo indotta da un sistema di campi di Hörmander con drift:

Definizione 4.1. *Per ogni $\delta > 0$, sia $C(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue φ: $[0,1] \to \Omega$ che soddisfano*

$$\varphi'(t) = \sum_{|I| \leq s} \lambda_I(t) \left(X_{[I]}\right)_{\varphi(t)} \text{ q.o. } t \in (0,1)$$

con $|\lambda_I(t)| \leq \delta^{|I|}$. Definiamo

$$d(x,y) = \inf\left\{\delta : \exists \varphi \in C(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\right\}.$$

La finitezza di d segue dalla condizione di Hörmander. Introduciamo anche la prossima definizione (che non si trova in [19] ma abbiamo introdotto e studiato in [6] nel contesto nonsmooth):

Definizione 4.2. *Per ogni $\delta > 0$, sia $C_1(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue $\varphi : [0,1] \to \Omega$ che soddisfano*

$$\varphi'(t) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i(t) \left(X_i\right)_{\varphi(t)} \text{ q.o. } t \in (0,1)$$

con $|\lambda_0(t)| \leq \delta^2$ e $|\lambda_j(t)| \leq \delta$ per $j = 1, ..., q$. Definiamo

$$d_X(x,y) = \inf\left\{\delta : \exists \varphi \in C_1(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\right\}.$$

La d_X è ancora una distanza, finita in forza di un teorema di connettività non banale. Le due distanze d, d_X sono equivalenti. Inoltre, nello spazio delle variabili liftate, la distanze $d_{\widetilde{X}}$ è localmente equivalente alla quasidistanza ρ di Rothschild-Stein.

La famosa proprietà di doubling locale provata da Nagel-Stein-Weinger [19] afferma:

Teorema 4.1. *Per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ esistono costanti positive c, r_0 tali che per ogni $x \in \Omega', r \leq r_0$,*

$$|B(x,2r)| \leq c\,|B(x,r)|.$$

Ora per applicare la teoria astratta degli integrali singolari vorremmo considerare un piccolo intorno nello spazio delle variabili liftate, con la distanza di controllo (o la quasidistanza equivalente) e la misura di Lebsegue, e applicare la teoria degli "spazi di tipo omogeneo" di Coifman-Weiss. Qui però nasce un problema. Infatti, dato un sistema di campi di Hörmander in un dominio Ω, ciò che serve sapere per applicare la teoria a un dominio $\Omega' \Subset \Omega$ è una proprietà di *doubling* del tipo

$$\mu\left(B\left(x,2r\right)\cap\Omega'\right)\leq c\mu\left(B\left(x,r\right)\cap\Omega'\right)\ \forall x\in\Omega'\Subset\Omega,r>0 \tag{4}$$

mentre ciò che sappiamo è

$$\mu\left(B\left(x,2r\right)\right)\leq c\mu\left(B\left(x,r\right)\right)\text{ for any }x\in\Omega'\Subset\Omega,0<r<r_0. \tag{5}$$

Ora è noto fin da [15] che quando Ω' è ad esempio una sfera metrica, la condizione (4) segue (5) se la distanza soddisfa una specie di *proprietà di segmento*: per ogni coppia di punti x_1, x_2 a distanza r e per ogni $\delta < r$ e $\varepsilon > 0$ esiste un punto x_0 a distanza $\leq \delta$ da x_1 e $\leq r - \delta + \varepsilon$ da x_2 (questo fatto si legge esplicitamente dalla dimostrazione in [4, Lemma 4.2]). Tuttavia quando è presente il termine di drift la proprietà di segmento è certamente falsa (lo è già per la distanza parabolica nel piano). La distanza di controllo soddisfa invece nel caso del drift la seguente proprietà più debole:

Lemma 4.1. *Per ogni $x, y \in \Omega$, intero positivo n e $\varepsilon > 0$, si può unire x a y con una curva γ e trovare $n+1$ punti $p_0 = x, p_1, p_2, ..., p_n = y$ su γ, tali che*

$$d_X\left(p_j,p_{j+1}\right)\leq\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{n}}d_X\left(x,y\right)\ \textit{ per } j=0,2,...,n-1.$$

Ora, mentre per distanze di cui si conosce una forma analitica esplicita anche in assenza della proprietà di segmento si può talvolta provare la (4) (come accade per la distanza parabolica), nel nostro caso non è chiaro come fare. Perciò siamo costretti a usare una teoria degli integrali singolari che non richieda la doubling globale (4). Una prima possibilità è considerare il contesto degli spazi *nondoubling*, studiati da Tolsa, Nazarov-Treil-Volberg e altri (v. ad es. [22], [20]). Risultati di continuità di integrali singolari in L^p e C^α per integrali singolari del tipo che ci interessa in questo contesto sono stati provati in [1]. Ma qui ci servono anche altri fatti, tra cui la teoria dei commutatori, che non era disponibile nella forma che ci serve in spazi nondoubling. Abbiamo quindi sviluppato ad hoc una teoria degli *integrali singolari in spazi localmente doubling* ([10]), che può avere un interesse indipendente. La teoria permette di dedurre teoremi in spazi localmente doubling a partire da analoghi teoremi già dimostrati in spazi doubling, senza rifare caso per caso la dimostrazione in modo adattato. Questa strada, oltre che essere una necessità, permette in realtà delle formulazioni più naturali dei risultati di stime a priori, nel seguente senso: posto che le stime che si dimostrano sono solo locali, è naturale che le ipotesi sui coefficienti dell'operatore siano espressi in una forma locale, che non chieda nulla ai coefficienti vicino al bordo del dominio, come invece facevano le teorie precedenti. Diamo infatti la definizione di spazio VMO locale, che esprime la nostra ipotesi sui coefficienti dell'operatore.

Definizione 4.3. *Diciamo che $a \in VMO_{X,loc}(\Omega)$ se per ogni $\Omega' \Subset \Omega$, la funzione*

$$\eta^*_{u,\Omega',\Omega}(r) = \sup_{t \le r} \sup_{x_0 \in \Omega'} \frac{1}{|B_t(x_0)|} \int_{B_t(x_0)} |u(x) - u_{B_t(x_0)}|\, dx,$$

è finita per $r \le r_0$ e tende a zero per $r \to 0$, dove r_0 è il numero che compare nella doubling locale di Nagel-Stein-Weinger.

Applicando quindi i teoremi di continuità L^p e C^α degli integrali singolari e frazionari e i teoremi di continuità L^p del commutatore di un integrale singolare o frazionario in spazi localmente doubling, si ottengono le stime a priori desiderate, per il momento però solo *per funzioni a supporto compatto* e sufficientemente piccolo (tecnica di riassorbimento). Per le stime L^p che coinvolgono operatori di integrale singolare a nucleo non congelato occorre inoltre applicare anche la tecnica di sviluppo in armoniche sferiche (adattata alla struttura di gruppo omogeneo), che è possibile implementare grazie alle stime uniformi sulle derivate di ogni ordine della soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti congelati (Teorema 6). I risultati di questo primo passo sono quindi:

Teorema 4.2 (Stime di Schauder, passo 1)**.** *Esistono $R_0, c > 0$ tali che per ogni $u \in C^{2,\alpha}_{\widetilde{X},0}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R_0\right)\right)$,*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)} \le c\left\{\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|_{C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)} + \|u\|_{L^\infty\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)}\right\}.$$

Teorema 4.3 (Stime L^p, passo 1)**.** *Per ogni $p \in (1, \infty)$ esistono $R_0, c > 0$ tali che per ogni $u \in C_0^\infty\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi}, R_0\right)\right)$,*

$$\|u\|_{S^{2,p}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)} \le c\left\{\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|_{L^p\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)} + \|u\|_{L^p\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R_0\right)\right)}\right\}.$$

5. Stime per funzioni a supporto non compatto

Dalle stime per funzioni a supporto compatto e piccolo si deve passare alle stime (su sfere piccole ma) per funzioni non a supporto compatto. Questo richiede utilizzo di funzioni cutoff e risultati di interpolazione per norme $C_{\widetilde{X}}^{1,\alpha}$ o $S_{\widetilde{X}}^{1,p}$. I teoremi di interpolazione per campi di Hörmander sono sempre laboriosi da dimostrare, in assenza di una struttura di gruppo; tuttavia questa sezione in buona parte si adatta da quanto già fatto nei casi senza drift. Nuovi ingredienti che occorrono sono: qualche proprietà delle norme $C_X^{k,\alpha}$, in particolare "teorema di Lagrange rispetto ai campi, con drift"

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{c}{\delta} d_X(x,y) \left(\sum_{i=1}^{q} \sup_{B(\overline{x},(1+\delta)R)} |X_i f| + d_X(x,y) \sup_{B(\overline{x},(1+\delta)R)} |X_0 f| \right)$$

per ogni $f \in C^1(B(\overline{x},(1+\delta)R))$, $x,y \in B(\overline{x},R)$; per il caso L^p, la *funzione massimale locale di Hardy-Littlewood.* Si ottengono così stime a priori, ancora nello spazio delle variabili liftate e su sfere piccole, ma non necessariamente per funzioni nulle al bordo:

Teorema 5.1 (Stime di Schauder, passo 2)**.** *Esistono $r_0, c, \beta > 0$ tali che per ogni $u \in C_{\widetilde{X}}^{2,\alpha}\left(\widetilde{B}(\overline{\xi}, r_0)\right)$, $0<t<s<r_0$,*

$$\|u\|_{C_{\widetilde{X}}^{2,\alpha}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},t\right)\right)} \leq \frac{c}{(s-t)^{\beta}} \left\{ \left\| \widetilde{\mathcal{L}} u \right\|_{C_{\widetilde{X}}^{\alpha}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},s\right)\right)} + \|u\|_{L^{\infty}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},s\right)\right)} \right\}.$$

Teorema 5.2 (Stime L^p, passo 2)**.** *Esistono r_0 e per ogni $r \leq r_0$ esiste $c>0$ tale che per ogni $u \in S_{\widetilde{X}}^{2,p}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},r\right)\right)$ si ha*

$$\|u\|_{S_{\widetilde{X}}^{2,p}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},r/2\right)\right)} \leq c \left\{ \left\| \widetilde{\mathcal{L}} u \right\|_{L^p\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},r\right)\right)} + \|u\|_{L^p\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},r\right)\right)} \right\}.$$

6. Ritorno alle variabili originarie

Ora si tratta di ritornare alle variabili originarie, proiettando sullo spazio $\mathbb{R}^n$ le stime trovate nel liftato. Per le stime L^p questo non introduce sostanzialmente nuovi problemi rispetto al già noto: le stime si proiettano in modo banale, l'ipotesi che se i coefficienti sono VMO i loro "liftati muti" $\widetilde{a}_{ij}(x,t) = a_{ij}(x)$ lo sono nelle variabili liftate segue da un teorema di Nagel-Stein-Weinger [19] sulla relazione tra i volumi delle sfere originaria e nel liftato:

Teorema 6.1. *Siano $B, \widetilde{B}$ sfere rispetto a d_X e $d_{\widetilde{X}}$, rispettivamente. Esistono costanti $\delta_0 \in (0,1), r_0, c_1, c_2 > 0$ tali che*

$$c_1 vol\left(\widetilde{B}_r(x,h)\right) \leq vol\left(B_r(x)\right) \cdot vol\left\{h' \in \mathbb{R}^{N-n} : (z,h') \in \widetilde{B}_r(x,h)\right\}$$
$$\leq c_2 vol\left(\widetilde{B}_r(x,h)\right)$$

per ogni $x \in \Omega, z \in B_{\delta_0 r}(x)$ e $r \leq r_0$. (Con $x \in \mathbb{R}^n$,$h \in \mathbb{R}^{N-n}$). Inoltre:

$$d_{\widetilde{X}}\left((x,h),(x',h')\right) \geq d_X(x,x').$$

Infine, la proiezione di $\widetilde{B}_r(x,h)$ su $\mathbb{R}^n$ è $B(x,r)$ e la proiezione è suriettiva.

Corollario 6.1. *Per ogni funzione positiva g definita in $B_r(x) \subset \Omega, r \leq r_0$, si ha*

$$\frac{c_1}{|B_{\delta_0 r}(x)|}\int_{B_{\delta_0 r}(x)} g(y)\,dy \leq \frac{1}{\left|\widetilde{B}_r(x,h)\right|}\int_{\widetilde{B}_r(x,h)} g(y)\,dydh' \leq \frac{c_2}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} g(y)\,dy.$$

dove δ_0 è come nel teorema precedente.

Per le stime di Schauder la questione è più sottile. La relazione fra distanza originaria indotta dai campi e distanza indotta dai campi liftati non è banale. Il risultato finale che si trova, a relazione tra gli spazi $C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R\right)\right)$ e $C^{\alpha}_X\left(B\left(\overline{x},R\right)\right)$, è il seguente:

Teorema 6.2. *Sia f una funzione definita in $B(\overline{x},R)$, sia $\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R\right)$ la sfera liftata, con $\overline{\xi} = (\overline{x},0)$ e poniamo $\widetilde{f}(x,h) = f(x)$, vedendo ora $\widetilde{f}$ come funzione definita su $\widetilde{B}_R\left(\overline{\xi},R\right)$. Valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$\left|\widetilde{f}\right|_{C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R\right)\right)} \leq |f|_{C^{\alpha}_X(B(\overline{x},R))},$$
$$|f|_{C^{\alpha}_X(B(\overline{x},s))} \leq \frac{c}{(t-s)^2}\left|\widetilde{f}\right|_{C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},t\right)\right)} \quad per\ 0<s<t<R$$

Inoltre

$$\left|\widetilde{X}_{i_1}\widetilde{X}_{i_2}\cdots\widetilde{X}_{i_k}\widetilde{f}\right|_{C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},R\right)\right)} \leq |X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}f|_{C^{\alpha}_X(B(\overline{x},R))},$$
$$|X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}f|_{C^{\alpha}_X(B(\overline{x},s))} \leq \frac{c}{(t-s)^2}\left|\widetilde{X}_{i_1}\widetilde{X}_{i_2}\cdots\widetilde{X}_{i_k}\widetilde{f}\right|_{C^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{B}\left(\overline{\xi},t\right)\right)}$$

for $0<s<t<R$ e $i_j = 0,1,2,\ldots,q$.

Come già fatto in [5, Proposition 8.3], per provare queste relazioni si sfrutta la *caratterizzazione integrale degli spazi di funzioni Hölderiane, alla Campanato* ([11]). Noi vogliamo però evitare di integrare su insiemi del tipo $\Omega \cap B(x,r)$ (il che porterebbe il problema di assicurare la relativa doubling), e questo richiede di rifare la teoria in chiave locale:

Definizione 6.1. *Per $\overline{x} \in \Omega', B(\overline{x}, R) \subset \Omega, f \in L^1(B(\overline{x}, R)), \alpha \in (0,1), 0 < s < t \leq 1$, sia*

$$M_{\alpha,B_{sR},B_{tR}}(f) = \sup_{x \in B(\overline{x},sR), r \leq (t-s)R} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{r^\alpha |B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - c| \, dy.$$

Se $f \in C_X^\alpha(B(\overline{x}, R))$ allora

$$M_{\alpha,B_{sR},B_{tR}}(f) \leq |f|_{C^\alpha(B_R(x_0))}.$$

Inoltre:

Lemma 6.1. *Per $\overline{x} \in \Omega', B(\overline{x}, 2R_0) \subset \Omega$, $R < R_0$, $\alpha \in (0,1)$, $0 < s < t \leq 1$, se $f \in L^1(B(\overline{x}, tR))$ è una funzione tale che $M_{\alpha,B_{sR},B_{tR}}(f) < \infty$, allora esiste una funzione f^*, q.o. uguale a f, tale che $f^* \in C_X^\alpha(B(\overline{x}, sR))$ e*

$$|f^*|_{C_X^\alpha(B(\overline{x},sR))} \leq \frac{c}{(t-s)^2} M_{\alpha,B_{sR},B_{tR}}(f)$$

per qualche c indipendente da f, s, t.

Segnaliamo che l'esponente 2 nel lemma nasce dalla presenza del drift e dalla variante della proprietà di segmento che proviamo per la distanza di controllo (Lemma 4.1).

Si noti che in questa fase dell'argomentazione, sia nel caso L^p che nel caso Schauder si lavora nello spazio originario in cui i campi non sono liberi e la misura della sfera non è equivalente a una potenza fissata del raggio; questo fatto richiede una teoria di spazi localmente doubling generali, non solo fatta su misura per il caso dei campi liberi.

Le stime finali, nelle variabili originarie, sono (con l'ovvio significato dei simboli):

Teorema 6.3 (Stime di Schauder, passo 3)**.** *Vale la seguente stima in piccolo ($0 < s < t < r_0$):*

$$\|u\|_{C_X^{2,\alpha}(B(\overline{x},s))} \leq \frac{c}{(t-s)^\omega} \left(\|\mathcal{L}u\|_{C_X^\alpha(B(\overline{x},t))} + \|u\|_{L^\infty(B(\overline{x},t))} \right)$$

e quindi la stima locale ($\Omega' \Subset \Omega$) per ogni $u \in C_X^{2,\alpha}(\Omega)$:

$$\|u\|_{C_X^{2,\alpha}(\Omega')} \leq c\left\{\|\mathcal{L}u\|_{C_X^{\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}.$$

Teorema 6.4 (Stime L^p, passo 3)**.** *Vale la seguente stima in piccolo (δ_0, r_0 opportuni):*

$$\|u\|_{S_X^{2,\alpha}(B(\overline{x},\delta_0 r_0/2))} \leq c\left(\|\mathcal{L}u\|_{L^p(B(\overline{x},r_0))} + \|u\|_{L^p(B(\overline{x},r_0))}\right)$$

e quindi la stima locale ($\Omega' \Subset \Omega$), per ogni $u \in S_X^{2,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{S_X^{2,p}(\Omega')} \leq c\left\{\|\mathcal{L}u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right\}.$$

7. Spazi localmente doubling

Concludiamo con qualche notizia in più sulla teoria degli spazi localmente doubling a cui si è accennato. Presentiamo anzitutto la definizione di *spazio (metrico) localmente omogeneo*, meno generale della definizione di spazio localmente omogeneo data in [10] ma sufficiente per questa applicazione della teoria.

Definizione 7.1. *Sia* (Ω, d) *uno spazio metrico. Sia* μ *una misura di Borel positiva e regolare in* Ω.

Supponiamo esista una successione crescente $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di sottoinsiemi misurabili e limitati di* Ω*, a chiusura compatta, tali che:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$$

e che per ogni $n = 1, 2, 3, ...$*:*

(i) esista $\varepsilon_n > 0$ *tale che*

$$\{x \in \Omega : d(x, y) < 2\varepsilon_n \text{ per qualche } y \in \Omega_n\} \subset \Omega_{n+1};$$

(ii) esista $C_n > 1$ *tale che per ogni* $x \in \Omega_n, 0 < r \leq \varepsilon_n$ *si abbia*

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C_n \mu(B(x, r)) < \infty.$$

(Notare che per $x \in \Omega_n$ *e* $r \leq \varepsilon_n$ *si ha* $B(x, 2r) \subset \Omega_{n+1}$*).*

Diremo allora che $(\Omega, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}, d, \mu)$ *è uno* spazio (metrico) localmente omogeneo.

Il risultato chiave dal punto di vista tecnico che dimostriamo in [10] è un'opportuna rivisitazione di una costruzione astratta che Christ fa in [12] in spazi omogenei, allo scopo di dimostrare in quel contesto il teorema $T(b)$ di continuità L^2 degli integrali singolari. Christ costruisce astrattamente una famiglia di "cubi diadici", aventi molte proprietà analoghe a quelle dei cubi diadici euclidei. Una di queste asserisce che ogni cubo Q è ancora uno spazio omogeneo, ossia vale appunto la proprietà

$$\mu(Q \cap B_{2r}(x)) \leq c\mu(Q \cap B_r(x)) \text{ per ogni } x \in Q, r > 0.$$

Quello che facciamo in [10] è provare una analoga costruzione astratta di cubi diadici in ogni spazio solo localmente doubling. Il risultato sorprendente che si ottiene è che la proprietà di doubling globale, che non si sa se è vera per lo spazio intero né per una sfera metrica, è invece vera per i cubi diadici (e per ogni unione finita di cubi diadici). Come conseguenza si prova che ogni sfera metrica è compresa tra due insiemi misurabili, di diametro e misura paragonabili a quelli della sfera, e sui quali vali una doubling globale. Applicando allora a questi insiemi teoremi noti sugli spazi doubling si ottengono come conseguenza teoremi analoghi su sfere metriche, ma in veste locale.

Vediamo ad esempio cosa diventano i teoremi sugli integrali singolari in spazi localmente doubling. Sia $\overline{x} \in \Omega_n$ e $B(\overline{x}, R_0) \subset \Omega_{n+1}$; sia $K(x,y)$ un nucleo che soddisfa in $B(\overline{x}, R_0)$ le stime standard degli integrali singolari e una proprietà di cancellazione del tipo

$$\left| \int_{\Omega_{n+1}, \varepsilon_1 < d(x,y) < \varepsilon_2} K(x,y)\, d\mu(y) \right| + \left| \int_{\Omega_{n+1}, \varepsilon_1 < d(x,z) < \varepsilon_2} K(z,x)\, d\mu(z) \right| \leq C,$$

per $x \in B(\overline{x}, R_0)$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tali che $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ e $B(x, \varepsilon_2) \subset \Omega_{n+1}$. (Si noti che si sta integrando su corone sferiche "intere", non intersecate con un dominio). Allora il nucleo

$$\widetilde{K}(x,y) = a(x)\, K(x,y)\, b(y)$$

con a, b funzioni cutoff supportate in sfere contenute in $B(\overline{x}, R_0)$, definisce un operatore di integrale singolare T continuo su $L^p(B(\overline{x}, R_0))$ per $p \in (1, \infty)$. Se poi

$$\widetilde{h}(x) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{d(x,y) > \varepsilon} \widetilde{K}(x,y) d\mu(y) \in C^{\gamma}(\Omega_{n+1})$$

per qualche $\gamma > 0$, allora

$$\|Tf\|_{C^{\eta}(B(\overline{x},R))} \leq c\,\|f\|_{C^{\eta}(B(\overline{x},HR))}$$

per un certo $H > 1$ e $\eta \in (0,1)$.

Il teorema sul commutatore ha la seguente forma. Se $K, \widetilde{K}$ sono come sopra, $a \in BMO_{loc}\left(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+3}\right)$, e

$$[a,T]\,f\,(x) = T\,(af)\,(x) - a\,(x)\,Tf\,(x)\,,$$

allora per ogni $p \in (1, \infty)$

$$\|[a,T]\,f\|_{L^p(B(\overline{x},R))} \leq c\,\|a\|_{BMO_{loc}(\Omega_{n+2},\Omega_{n+3})}\,\|f\|_{L^p(B(\overline{x},R))}\,.$$

Se in particolare $a \in VMO_{loc}\left(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+3}\right)$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che per ogni $f \in L^p\left(B\left(\overline{x}, r\right)\right)$

$$\|[a,T]\,f\|_{L^p(B(\overline{x},r))} \leq \varepsilon\,\|f\|_{L^p(B(\overline{x},r))}\,.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bramanti: *Singular integrals in nonhomogeneous spaces: L^2 and L^p continuity from Hölder estimates.* Revista Matematica Iberoamericana 26 (2010), no. 1, 347–366.

[2] M. Bramanti, L. Brandolini: *L^p-estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups.* Rend. Sem. Mat. dell'Univ. e del Politec. di Torino. Vol. 58, 4 (2000), 389-433.

[3] M. Bramanti, L. Brandolini: *L^p-estimates for nonvariational hypoelliptic operators with VMO coefficients.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 2, 781-822.

[4] M. Bramanti-L. Brandolini: *Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic PDES.* Revista Matematica Iberoamericana, 21 (2005), no. 2, 511–556.

[5] M. Bramanti, L. Brandolini: *Schauder estimates for parabolic nondivergence operator of Hörmander type.* J. Differential Equations 234 (2007) 177-245.

[6] M. Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: *On the lifting and approximation theorem for nonsmooth vector fields.* Indiana University Mathematics Journal. Issue 6 Volume 59 (2010), 1889–1934.

[7] M. Bramanti, M. C. Cerutti, M. Manfredini: *L^p-estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients.* Journal of Math. Anal. and Appl., 200, 332-354 (1996).

[8] M. Bramanti, G. Cupini, E. Lanconelli, E. Priola: *Global L^p-estimates for degenerate Ornstein-Uhlenbeck operators with variable coefficients.* Mathematische Nachrichten, 1-15 (2013)/ DOI 10.1002/mana.201200189.

[9] M. Bramanti, M. Zhu: *L^p and Schauder estimates for nonvariational operators structured on Hörmander vector fields with drift.* To appear on Analysis and Partial Differential Equations. ArXiv: 1103.5116v1 26 Mar 2011.

[10] M. Bramanti, M. Zhu: *Local real analysis in locally doubling spaces.* Manuscripta Mathematica 138, 477–528 (2012).

[11] S. Campanato: *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 17 (1963) 175–188.

[12] M. Christ: *A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral.* Colloq. Math. 60/61 (1990), no. 2, 601–628.

[13] M. Di Francesco, S. Polidoro: *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov-type operators in non-divergence form.* Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 11, 1261–1320.

[14] G. B. Folland: *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Arkiv för Math. 13, (1975), 161-207.

[15] B. Franchi, E. Lanconelli: *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 10 (1983), no. 4, 523–541.

[16] C. E. Gutiérrez, E. Lanconelli: *Schauder estimates for sub-elliptic equations.* J. Evol. Equ. 9 (2009), no. 4, 707–726.

[17] L. Hörmander: *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[18] E. Lanconelli, S. Polidoro: *On a class of hypoelliptic evolution operators.* Partial differential equations, II (Turin, 1993). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 52 (1994), no. 1, 29–63.

[19] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger: *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties.* Acta Math., 155 (1985), 130-147.

[20] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg: *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces.* Acta Math. 190 (2003), no. 2, 151–239.

[21] L. P. Rothschild-E. M. Stein: *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups.* Acta Math., 137 (1976), 247-320.

[22] X. Tolsa: *A proof of the weak (1,1)-inequality for singular integrals with non doubling measures based on a Calderón-Zygmund decomposition.* Publ. Mat. 45 (2001), no. 1, 163–174.

E-mail address: `marco.bramanti@polimi.it`

Dipartimento di Matematica. Politecnico di Milano. Via Bonardi 9. 20133 Milano.