PERTURBATIVE METHODS FOR INVERSE PROBLEMS ON DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS
METODI PERTURBATIVI PER PROBLEMI INVERSI SU EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEGENERI

ANGELO FAVINI

Abstract. Pertubation results for linear relations satisfying a resolvent condition of weak parabolic type are established. Such results are applied to solve some inverse problems for degenerate differential equations, supplying a new method which avoids any fixed-point argument and essentially consists in reducing the original inverse problem to an auxiliary direct one.

Sunto. Vengono provati teoremi di perturbazione per relazioni lineari soddisfacenti una condizione risolvente di tipo debolmente parabolica. Tali risultati sono applicati a problemi inversi per equazioni differenziali degeneri, fornendo un nuovo metodo perturbativo che evita l'uso di argomenti come punto fisso e che essenzialmente consiste nel ridurre l'originale problema inverso ad un problema ausiliario diretto.

2010 MSC. 34A55; 34A9; 47A06; 47A55 .

Keywords. Pertubative methods, Inverse problems, Degenerate differential equations

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2012) pp. 88–103

Department of Mathematics, University of Bologna.

ISSN 2240-2829.

All'inizio di questo ciclo di seminari, voglio ricordare il Professor Bruno Pini, maestro di molti di noi, ed ispiratore dei Seminari di Analisi Matematica.
A lui va il mio commosso pensiero.

1. Introduzione

Comincio questo seminario esponendo il problema in un caso semplice ed intuitivo.

Il problema è di identificare la coppia

$$(y, f) \in C([0, \tau]; D(L)) \times C([0, \tau]; \mathbb{C})$$

soddisfacente il problema differenziale

$$\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z + h(t), \quad 0 < t \leq \tau, \tag{1}$$

$$(My)(0) = My_0, \tag{2}$$

insieme all'informazione aggiuntiva

$$\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{3}$$

sotto la condizione di tipo debolmente parabolico che L, M siano operatori linear chiusi nello spazio di Banach complesso X, il dominio $D(L)$ di L sia contenuto in $D(M)$,

$0 \in \rho(L)$ e valgano le stime risolventi $(H_{M,L})$: (cfr. Favini e Yagi [10])

$$\|M(zM - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1 + |z|)^{-\beta} \tag{4}$$

per ogni

$$z \in \Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C}, \ \Re z \geq -c(1 + |\Im z|)^\alpha\}, \quad 0 < \beta \leq \alpha \leq 1, \ \forall c \geq 0,$$

con $h \in C([0, \tau]; X)$, $y_0 \in D(L)$, $\Phi \in X^*$, $g \in C^1([0, \tau]; \mathbb{C})$ fissati. Naturalmente, aggiungiamo la condizione di compatibilitá

$$\Phi[My_0] = g(0). \tag{5}$$

Applicando Φ, dalla (1), mediante (3), si ottiene che necessariamente

$$g'(t) = \Phi[Ly(t)] + f(t)\Phi[z] + \Phi[h(t)], \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Perció, se

$$\Phi[z] \neq 0,$$

allora $f(t)$ è data da

$$f(t) = \frac{1}{\Phi[z]}\{g'(t) - \Phi[Ly(t)] - \Phi[h(t)]\}. \tag{6}$$

Se sostituiamo (6) in (1), questo porta al problema diretto

$$\frac{d}{dt}[My(t)] = Ly(t) - \frac{1}{\Phi[z]}\Phi[Ly(t)]z - \frac{1}{\Phi[z]}\Phi[h(t)]z + \frac{1}{\Phi[z]}g'(t)z + h(t), \tag{7}$$

$$(My)(0) = My_0.$$

Cosí il problema inverso (1)-(3) è ridotto al problema diretto (7), (2).

Per risolvere la (7), dobbiamo fare delle assunzioni sull'operatore B definito da

$$D(B) = D(L), \quad By = -\frac{\Phi[Ly]}{\Phi[z]}z, \quad y \in D(B)$$

tali che l'operatore $L + B$ abbia le stesse proprietá spettrali di L che ci permettano di trattare

$$\frac{d}{dt}(My) = (L + B)y + h(t) - \frac{1}{\Phi[z]}\Phi[h(t)]z + \frac{1}{\Phi[z]}g'(t)z$$

come nella monografia [10] di Favini-Yagi.

Questo metodo è stato descritto da Angelo Favini nel lavoro [8], facendo appello ad argomenti di regolaritá massimale spaziale delle soluzioni di

$$\frac{d}{dt}[My(t)] = Ly(t) + f(t), \quad 0 < t \leq \tau,$$

$$(My)(0) = My_0.$$

Risultati di regolaritá temporali sono conosciuti cfr. [5], [6].

Attualmente noi faremo riferimento ad un nuovo risultato dovuto peró a Favaron-Favini [7], vedi anche [8].

Nel lavoro [6] di Favaron-Favini vengono trattate equazioni integro-differenziali degeneri di tipo parabolico, molto generali e per i quali potrebbero essere studiati numerosi problemi inversi.

2. Gli spazi $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$

Per sviluppare la nostra tecnica, avremo bisogno di considerare operatori lineari multivoci (m.l.) o relazioni lineari, secondo la letteratura russa.

Un tale operatore A agisce da X in $\mathcal{P}_X$ con dominio $D(A) = \{x \in X,\ Ax \neq \emptyset\}$, che è un sottospazio lineare di X; si ricordi che $Ax + Ay \subset A(x + y)$, $\lambda Ax \subseteq A(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in D(A)$. $\mathcal{G}(A) \subseteq X \times X$, $\mathcal{G}(A) = \{(x, y),\ x \in D(A),\ y \in Ax\}$ è il grafico di A.

Se $U \in \mathcal{P}_X$ soddisfa $U \cap D(A) \neq \emptyset$, la restrizione $A|_U$ di A a U è definita da $D(A|_U) = U \cap D(A)$ e $(A|_U)x = Ax$, $x \in D(A|_U)$.

L'inverso A^{-1} di un operatore m.l. A è definito da $D(A^{-1}) = R(A) =$ immagine di A

$$A^{-1}y = \{x \in D(A) :\ y \in Ax\}, \quad y \in D(A^{-1})$$

Il nucleo $N(A)$ di A è $A^{-1}0 = \{x \in D(A),\ 0 \in Ax\}$. Se $N(A) = \{0\}$, A si dice iniettivo.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, A e B sono m.l. su X, allora

$$\lambda A,\ A + B,\ AB$$

sono definiti in maniera naturale e sono operatori m.l..

Se $U \in \mathcal{P}_X \setminus \emptyset$, I_U $(I_X = I)$ denota l'operatore identitá in U: $\mathcal{G}(I_U) = \{(u, u),\ u \in U\}$.

Se A, B sono m.l., $B \subset A$ se $D(B) \subseteq D(A)$ e $Bx = Ax$ per ogni $x \in D(B)$.

Se $B \subset A$ e $Bx = Ax$ $\forall x \in D(B)$, si dice che A è una estensione di B.

Se A è una estensione di B. allora $\mathcal{G}(B \subseteq \mathcal{G}(A)$ ma non vale il viceversa.

Un operatore lineare SINGLE-VALUED S è detto essere una sezione di A se $D(S) = D(A)$ e $S \subset A$, cioè $Sx \in Ax$ per ogni $x \in D(A)$.

Se $U,\ V \in \mathcal{P}_X \setminus \emptyset$, la distanza $d(U,V)$ è

$$\inf_{u \in U,\ v \in V} \|u - v\|_X$$

e $d(x,V) = d(V,x) =$ distanza tra $\{x\}$ e V.

Per una relazione lineare A si pone (cfr. Cross [3])

$$\begin{aligned}
&\|Ax\| = d(Ax,0) = \inf_{y \in Ax} \|y\|_X, \quad x \in D(A)\\
&\Rightarrow \|Ax\| = d(z, A0) \ \ \forall z \in Ax.\\
&\Rightarrow \|Ax\| = d(Ax, A0).
\end{aligned}$$

La norma $\|A\|$ di una relazione lineare su X è

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A),\ \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|$$

Se $D(A) = X$ e $\|A\| < +\infty$ si dice che A è limitato.

$\|A\|$ non è una vera norma, a meno che A non sia single-valued.

Una relazione lineare A si dice CHIUSA se il suo grafico $\mathcal{G}(A)$ è chiuso.

Se A è una relazione lineare in X, l'insieme risolvente è definito da

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C},\ (zI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

e si vede che se $\rho(A) \neq \emptyset$, allora A è chiusa.

Se A è una relazione lineare in X,

$A^0(zI - A)^{-1}$ è la sezione lineare $z(zI - A)^{-1} - I$ di $A(zI - A)^{-1}$, $z \in \rho(A)$.

Si noti che A^0 è solo un simbolo e non è necessariamente una sezione di A.

Cosí $A^0(0I - A)^{-1} = -I$ non deve essere capita come $A^0 A^{-1} = -I$, a meno che A non sia single-valued, e allora $A^0(zI - A)^{-1}$ si riduce a $A(zI - A)^{-1}$.

Se A è una relazione lineare in X, diremo che A soddisfa (H_A) se

$\rho(A)$ contiene $\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C};\ \Re z \geq -c(1+|\Im z|)^\alpha\}$,
$\alpha \in (0,1]$, $c > 0$ e $\exists\ \beta \in (0,\alpha]$, e $c > 0$ tali che

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1+|z|)^{-\beta}, \quad \forall z \in \Sigma_\alpha.$$

Se M e L sono operatori linear single-valued in X, $D(L) \subseteq D(M)$, sia A la relazione lineare LM^{-1} definita da

$$D(A) = M(D(L)),\ Ax = \{Ly :\ y \in D(L),\ x = My\},\ x \in D(A).$$

Allora $(\lambda M - L)M^{-1} = \lambda I - A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $M(\lambda M - L)^{-1} = ((\lambda M - L)M^{-1})^{-1}$
$= (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, nel senso di m.l. operatori.

Sia $\rho_M(L)$ il risolvente M-modificato di L, cioè

$$\rho_M L := \{z \in \mathbb{C} :\ (zM - L)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Si noti che se M è anche chiuso allora $\rho_M(L) \subseteq \rho(A)$. Pertanto, se L e M sono operatori lineari chiusi in X e vale

$$(H_{M,L}) \qquad \Sigma_\alpha \subseteq \rho_M(L) \ \text{ e } \ \|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1+|\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\alpha,$$

allora l'operatore multivoco $A = LM^{-1}$ soddisfa (H_A).

Sia ora A m.l. con $0 \in \rho(A)$. Su $D(A)$ si introduce la norma

$$\|x\|_{D(A)} = \|Ax\|, \quad x \in D(A)$$

$(D(A), \|\cdot\|_{D(A)}$ è uno spazio di Banach.

Se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è uno spazio di Banach, $C^0(0,+\infty;Y)$ denota l'insieme di tutte le funzioni continue da $(0,+\infty)$ a Y. Se g è una funzione fortemente misurabile da $(0,+\infty)$ a Y si pone

$$\|g(\xi)\|_{L^q_*(Y)} = \left(\int_0^{+\infty} \|g(\xi)\|_Y^q \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < +\infty,$$

e

$$\|g(\xi)\|_{L_*^{+\infty}(Y)} = \sup_{\xi \in (0,\infty)} \|g(\xi)\|_Y, \quad \text{se} \quad q = \infty.$$

Richiamiamo ora gli spazi di medie di Lions-Peetre.

Sia $p_0,\ p_1 \in [1, +\infty)$ oppure $p_0 = p_1 = +\infty$.

Se $\gamma \in (0,1)$, sia $p^{-1} = \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}$ se $p_0,\ p_1 \in [1, +\infty)$ e $p = +\infty$ se $p_j = +\infty$, $j = 0, 1$.

$S(\gamma, p_0, X, \gamma - 1, p_1, D(A))$ denota l'insieme di tutti gli $x \in X$ tali che $x = v_0(\xi) + v_1(\xi)$, $\xi \in (0, +\infty)$, $v_j \in C^0((0, +\infty), Y_j)$, $\|\xi^{\gamma_j} v_j(\xi)\|_{L_*^{p_j}(Y_j)} < +\infty$, $j = 0, 1$. $(Y_0, Y_1, \gamma_0, \gamma_1) = (X, D(A), \gamma, \gamma - 1)$.

Lo spazio di Banach complesso $(X, D(A))_{\gamma,p}$ è definito da

$$(X, D(A))_{\gamma,p} = S(\gamma, p_0, X, \gamma - 1, p_1, D(A)),$$

$$\|x\|_{(X,D(A))_{\gamma,p}} = \inf\{\|\xi^\gamma v_0(\xi)\|_{L_*^{p_0}(X)} + \|\xi^{\gamma-1} v_1(\xi)\|_{L_*^{p_1}(D(A))}\}.$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutte le possibili rappresentazioni di x nella forma specificata.

Se $\gamma \in (0,1)$ e Z è uno spazio di Banach complesso, diciamo che Z appartiene alla classe $J_\gamma(X, D(A))$ (rispettivamente $K_\gamma(X, D(A))$) se Z è uno spazio intermedio tra X e $(X, D(A))_{\gamma,1}$ (rispettivamente tra $(X, D(A))_{\gamma,\infty}$ e $D(A)$).

Sia $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$, $\gamma \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty]$. Allora lo spazio di Banach complesso $X_A^{\gamma,p}$ è definito da

$$X_A^{\gamma,p} = \{x \in X : [x]_{X_A^{\gamma,p}} := \|\xi^\gamma A^0 (\xi I - A)^{-1} x\|_{L_*^p(X)} < +\infty\},$$

$$\|x\|_{X_A^{\gamma,p}} = \|x\|_X + [x]_{X_A^{\gamma,p}}.$$

Facciamo ora l'assunzione (H_A) su A. É ben noto che se A è single-valued e $\beta = 1$, allora $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$ coincidono. Per $\beta \in (0,1)$ vale il seguente risultato [cfr. Favaron-Favini [5, Proposition 4.3].

Proposizione 2.1. *Sia A una relazione lineare su X, soddisfacente (H_A). Allora*

$$X_A^{\gamma,p} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p}, \quad \gamma \in (0,1), \quad p \in [1,+\infty],$$

$$(X, D(A))_{\gamma,p} \hookrightarrow X_A^{\gamma+\beta-1,p}, \quad \gamma \in (1-\beta,1), \quad p \in [1,+\infty].$$

Siano M, L_1, L_2 single-valued operatori lineari in X, $D(L_1) \cap D(L_2) \neq \{0\}$, $D(L_1) \subseteq D(M)$, $0 \in \rho(L_1) \cap \rho(L_1 + L_2)$

e valgano (H_{M,L_1}) e (H_{M,L_1+L_2}) con gli stessi α e β. Sia $A_0 = (L_1 + L_2)M^{-1}$, $A_1 = L_1 M^{-1}$. Si ha

Proposizione 2.2. i) *Siano M, L_1, L_2 operatori chiusi in X, $\neq D(L_1) \cap D(L_2)$, $D(L_1) \subseteq D(M)$, $0 \in \rho(L_1) \cap \rho(L_1 + L_2)$. Assumiamo $L_2|_{D(L_1+L_2)} \in \mathcal{L}(D(L_1 + L_2); X)$. Allora*

$$X_{A_0}^{\gamma,p} \hookrightarrow X_{A_1}^{\gamma+\beta-1,p}, \quad \gamma \in (1-\beta,1), \quad p \in [1,+\infty] \tag{8}$$

ii) *Sia $D(L_1) \subseteq D(L_2) \cap D(M)$ e $L_2|_{D(L_1)} \in \mathcal{L}(D(L_1), X)$. Allora oltre alla (8) vale*

$$X_{A_1}^{\gamma,p} \hookrightarrow X_{A_0}^{\gamma+\beta-1,p}, \quad \gamma \in (1-\beta,1), \quad p \in [1,+\infty).$$

iii) *Sia $\beta = 1$ e valgono le assunzioni in ii), allora $X_{A_0}^{\gamma,p} \cong X_{A_1}^{\gamma,p}$.*

3. Risultati di perturbazione

Esporró alcuni risultati di pertubazione, il primo dei quali estende una precedente affermazione di Cross-Favini-Yakubov [4]. D'ora in poi, per ogni $r \geq 0$ denoteremo con $\Sigma_{\alpha,r}$ la sottoregione $\Sigma_{\alpha,r} = \{z \in \Sigma_\alpha : |z| \geq r\}$ di Σ_α.

Teorema 3.1. *Sia A_1 una relazione lineare in X soddisfacente (H_{A_1}) con $\beta \in (0,\alpha]$, $\alpha \in (0,1]$. Sia $(Z, \|\cdot\|_Z)$ uno spazio di Banach complesso,*

$Z \in J_\gamma(X, D(A))$ con $\gamma \in (0,\beta)$. Sia A_2 un operatore lineare single-valued con $Z \subseteq D(A_2)$ e $A_2|_Z \in \mathcal{L}(Z,X)$. Allora

$\forall \rho \in (0,1)$ esistono $r_{\beta,\gamma,\rho} \geq 0$ e $c_\rho > 0$ tali che $\Sigma_{\alpha,r_{\beta,\gamma,\rho}} \subseteq \rho(A_1 + A_2)$ e

$$\|(\lambda I - (A_1 + A_2))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_\rho (1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\alpha,r_{\beta,\gamma,\rho}}.$$

Cfr. Lunardi [11] per $\alpha = \beta = 1$ e operatori single-valued.

Teorema 3.2. *Siano M, L_1, L_2 operatori lineari chiusi single-valued in X, $D(L_1) \subseteq D(L_2) \cap D(M)$, $0 \in \rho(L_1)$,*

e valgano (H_{M,L_1}) con $\beta \in (0.\alpha]$, $\alpha \in (0,1]$ e

$$\|L_2 x\|_X \leq c\|Mx\|_X^{1-\gamma}\|x\|_{D(L_1)}^{\gamma}, \quad x \in D(L_1),$$

per un certo $c > 0$, e $\gamma \in [0, \beta]$.

Allora $\forall \rho \in (0,1)$ $\exists$ $r_{\beta,\gamma,\rho} \geq 0$ e $c_\rho > 0$ tali che

$\Sigma_{\alpha, r_{\beta,\gamma,\rho}} \subseteq \rho_M(L_1 + L_2)$ e

$$\|M(\lambda M - (L_1 + L_2))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_\rho(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\alpha, r_{\beta,\gamma,\rho}}.$$

I successivi teoremi 3.3 e 3.4 estendono Lunardi [11], Proposition 2.4.1 (ii), in cui $\alpha = \beta = 1$, A è single-valued, $M = I$.

Teorema 3.3. *Sia A_1 una relazione lineare su X soddisfacente (H_{A_1}), $\beta \in (0.\alpha]$, $\alpha \in (0,1]$.*

Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio di Banach complesso tale che $Y \hookrightarrow X_\gamma^p$ per un $\gamma \in (1-\beta, 1)$ e $p \in [1, +\infty]$, dove

$X_\gamma^p \in \{(X, D(A_1))_{\gamma,p}, X_{A_1}^{\gamma,p}\}$ e sia A_2 un operatore lineare single-valued in X con $D(A_1) \subseteq D(A_2)$ e $A_2|_{D(A_1)} \in \mathcal{L}(D(A_1), Y)$.

Allora, $\forall \rho \in (0,1)$ $\exists$ $r_{\beta,\gamma,\rho} \geq 0$ e $c > 0$ tali che $\Sigma_{\alpha, r_{\beta,\gamma,\rho}} \subseteq \rho(A_1 + A_2)$ e

$$\|(\lambda I - (A_1 + A_2))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\alpha, r_{\beta,\gamma,\rho}}.$$

Teorema 3.4. *Siano M, L_1, L_2 single-valued operatori lineari in X, $D(L_1) \subseteq D(L_2) \cap D(M)$, M chiuso, $0 \in \rho(L_1)$, e valgano la condizione risolvente (H_{M,L_1}), $\beta \in (0.\alpha]$, $\alpha \in (0,1]$. Posto $A_1 = L_1 M^{-1}$ sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio di Banach complesso tale che $Y \hookrightarrow Y_\gamma^p \in \{(X, D(A_1))_{\gamma,p}, X_{A_1}^{\gamma,p}\}$, $\gamma \in (1-\beta, 1)$ e $p \in [1, +\infty]$. Inoltre sia $L_2|_{D(L_1)} \in \mathcal{L}(D(L_1), Y)$. Allora, $\forall \rho \in (0,1)$ $\exists$ $r_{\beta,\gamma,\rho} \geq 0$ e $c > 0$ tali che $\Sigma_{\alpha, r_{\beta,\gamma,\rho}} \subseteq \rho_M(L_1 + L_2)$ e*

$$\|M(\lambda M-(L_1+L_2))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1+|\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\alpha,r_{\beta,\gamma,\rho}}.$$

4. Esempi

Ci limitiamo a due esempi di applicazioni dei teoremi precedenti.

4.1. **Esempio.** Trattiamo equazioni alle derivate parziali in spazi di Hölder (cfr Von Wahl [12]).

Sia Ω un insieme aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare. Se $\nu \notin \mathbb{N}$, $\nu > 0$, scriviamo $\nu = [\nu] + \{\nu\}$,

$[\nu] \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{\nu\} \in (0,1)$. Se $\tilde\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sia

$$|\tilde\eta| = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \quad \text{e} \quad D^{\tilde\eta} = \frac{1}{i^{|\tilde\eta|}} \frac{\partial^{|\tilde\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot \ \cdot \partial x_n^{\eta_n}}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ e $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$, poniamo $C^k(\bar\Omega) = \{u \in C^0(\bar\Omega), \quad D^r u \in C^0(\bar\Omega), \quad |\tilde\eta| \le r\}$

$$C^\nu(\bar\Omega) = \{u \in C^{[\nu]}(\bar\Omega) : \quad D^{\tilde\eta} u \in C^{\{\nu\}}(\bar\Omega), \quad |\tilde\eta| = [\nu]\}.$$

Sia ora $\delta \in (0,1)$, $a_{\tilde\eta} \in C^\delta(\bar\Omega)$, $|\tilde\eta| \le 2m$ con $a_{\tilde\eta} : \bar\Omega \to \mathbb{R}$ per $|\tilde\eta| = 0, 2m$

$$K^{-1}|y|_n^{2n} \le \sum_{|\tilde\eta|=2m} a_{\tilde\eta}(x) y^{\tilde\eta} \le K|y|_n^{2n}, \quad \forall (x,y) \in \bar\Omega \times \mathbb{R}^n$$

dove K è una costante positiva e $y^{\tilde\eta} = y_1^{\eta_1} \dots y_n^{\eta_n}$, $|y|_n^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2$.

Sia $[\nu] = 2m$, $\{\nu\} = \sigma$, $\nu = [\nu] + \{\nu\}$.

Introduciamo i seguenti operatori lineari in $X = C^{\{\nu\}}(\bar\Omega)$,

$$D(A_1) = \{u \in C^\nu(\bar\Omega); \quad D^{\tilde\eta} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\tilde\eta| =\le m-1\}$$

$$D(A_2) = C^{\nu-1}(\bar\Omega)$$

$$A_1 u = -\sum_{|\tilde\eta|=0,[\nu]} a_{\tilde\eta} D^{\tilde\eta} u, \quad u \in D(A_1)$$

$$A_2 u = -\sum_{|\tilde\eta|=1}^{[\nu]-1} a_{\tilde\eta} D^{\tilde\eta} u, \quad u \in D(A_2)$$

Allora, purchè $\min_{x\in\bar\Omega, |\tilde\eta|=0} a_{\tilde\eta} \ge A_0$ grande, in Von Wahl [12], Satz 1, è dimostrato che

$$\|(\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(C^{\{\nu\}}(\bar{\Omega}))} \leq c(1+|\lambda|)^{-\frac{([\nu]-\{\nu\})}{[\nu]}}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_1.$$

e (H_{A_1}) è soddisfatta con $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{([\nu]-\{\nu\})}{[\nu]} = 1 - \frac{\sigma}{2n}$. Si vede che $\|u\|_{C^\nu(\bar{\Omega})}$ e $\|u\|_{D(A_1)}$ sono equivalenti su $D(A_1)$.

Si vede poi che $A_2 \in \mathcal{L}(D(A_2); X)$ e cosí il Teorema 3.1 si applica con $(Z, \|\cdot\|_Z) = (D(A_2), \|\cdot\|_{C^{\nu-1}(\bar{\Omega})})$

4.2. **Esempio.** Sia $I = (0,1)$, $X = L^2(I)$, $D(M) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$, $D(L_1) = H^4(I) \cap H_0^2(I)$, $Mu = (I + D^2)u$, $u \in D(M)$, $L_1 u = -D^4 u$, $u \in D(L_1)$,

dove $D^k = \frac{1}{i^k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si vede che

$$\|M(\lambda M - L_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1+|\lambda|)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda \in \Sigma_1.$$

Introduciamo la perturbazione L_2 mediante

$$D(L_2) = H^2(I), \quad L_2 u = \sum_{j=0}^{2} a_j D^j u, \quad u \in D(L_2);$$

con $a_j \in C^0(\bar{I})$, per $j = 0, 1, 2$. Allora si riconosce che $\forall u \in D(L_1)$ e ogni $\gamma \in [0,1)$

$$\|L_2 u\|_{L^2(I)} \leq c\|Mu\|_{L^2(I)}^{1-\gamma} \|L_1 u\|_{L^2(I)}^{\gamma}.$$

Prendendo $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$, si puó applicare il Teorema 3.2.

5. Applicazioni a problemi di identificazione degeneri

In questo paragrafo estenderemo dei risultati di Al Horani, Favini [1], [2], cfr. l'introduzione.

Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach complesso; studiamo il seguente problema di identificazione degenere: trovare la funzione vettoriale

$(v, f_1, \ldots, f_N)$, $v : I_T = [0,T] \to X$, $f_i : I_T \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots N$ soddisfacenti

$$D_t(Mv(t)) = L_1 v(t) + \sum_{i=1}^{N} f_i(t) y_i + f(t), \quad Mv(0) = Mv_0, \tag{9}$$

insieme alle N informazioni addizionali

$$\Psi_i[Mv(t)] = g_i(t), \quad t \in I_T, \quad i = 1, \dots N,$$

dove $\Psi_i \in X^*$ è dato, $i = 1, \dots N$.

Applicando i funzionali Ψ_i alla (9) si vede che se la matrice quadrata di ordine N

$$U = \begin{pmatrix} \Psi_1[y_1] & \dots & \Psi_1[y_N] \\ \\ \Psi_N[y_1] & \dots & \Psi_N[y_N] \end{pmatrix}$$

è invertibile, cosicchè $\det(U) \neq 0$, allora

$$f_i(t) = [\det(U)]^{-1} \sum_{k=1}^{N} U_{k,i} \{D_t g_k(t) - \Psi_k[f(t)] - \Psi_k[L_1 v(t)]\}$$

dove $U_{k,i}$ è il cofattore dell'elemento $\Psi_k[y_i]$ di U. Segue che l'equazione (9) diventa

$$D_t(Mv(t)) = (L_1 + L_2)v(t) + \sum_{i=1}^{N} h_i(t) y_i + f(t), \quad t \in I_T, \quad Mv(0) = Mv_0, \tag{10}$$

dove

$$D(L_2) = D(L_1), \quad L_2 x = -[\det(U)]^{-1} \sum_{i,k=1}^{N} U_{k,i} \Psi_k[L_1 x] y_i, \quad x \in D(L_2),$$

$$h_i(t) = -[\det(U)]^{-1} \sum_{k=1}^{N} U_{k,i} \{D_t g_k(t) - \Psi_k[f(t)]\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in I_T.$$

Per risolvere (10) si applica il Teorema 5.9 in Favaron-Favini [6].

Poniamo $A_0 = (L_1 + L_2)M^{-1}$, $A_1 = L_1 M^{-1}$, $A_2 = L_2 M^{-1}$ con riferimento al risultato sopracitato e introduciamo le seguenti ipotesi

(H1) Valga (H_{M,L_1}) con $3\alpha + 4\beta > 6$ e costanti positive.

(H2) $L_1 v_0 + f(0) \in X_A^{\varphi_0}$, $(y_1, \dots, y_N) \in \prod_{i=1}^{N} X_{A_1}^{\varphi_i, r}$, dove $\varphi_0 \in (6 - 3\alpha - 3\beta, \beta)$, $\varphi_i \in (6 - 3\alpha - 3\beta, 1)$,
$i =, 1 \dots N$, $r \in [1,^{-1}]$, $v_0 \in D(L_1)$.

(H3) $f \in C^{\mu_0}(I_T; X)$, $\mu_0 - 1/2 \in [(3 - 2\alpha - \beta)/\alpha, 1/2)$.

(H4) $(g_1,\dots,g_N)\in\prod_{i=1}^N C^{1+\mu_i}(I_t,\mathbb{C})$ dove $\mu_i\in((3-2\alpha-\beta)/\alpha,1)$, $i=1,\dots,N$,

(H5) $\|(L_2-\xi_0 M)L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}<1$, ξ_0 è un numero positivo maggiore di una quantitá positiva opportuna che puó essere precisata.

Il risultato fondamentale si legge:

Teorema 5.1. *Siano $(M,D(M))$, $(L_1,D(L_1))$, $D(L_1)\subseteq D(M)$ operatori chiusi in X, $0\in\rho(L_1)$, $\Psi_i\in X^*$, $i=1,\dots,N$,*

valga (H1)∼(H5), La matrice U sia invertibile. Sia $\gamma=\min_{i=0,\dots,N}\gamma_i$ e $r=\min\{\mu_i(\alpha+\beta+\gamma-2)/\alpha\}$ dove (α,β) è come in (H1). Allora per ogni $\delta\in I_{\alpha,\beta,\tau}$ il problema di identificazione (5.1) (5.3) ammette una unica soluzione $(v,f_1,\dots,f_N)$ tale che $v\in C^\delta(I_T;D(L_1))$, $Mv\in C^{1+\delta}(I_T;X)$, $v(0)=v_0$ e $f_i\in C^\delta(I_T;\mathbb{C})$, $i=1,\dots,N$.

Qui

$$I_{\alpha\beta,\nu}=\begin{cases}((3-2\alpha-\beta)/\alpha,\nu) & \textit{se}\ \ \nu\in(3-2\alpha-\beta)/\alpha,1/2)\\ ((3-2\alpha-\beta)/\alpha,1/2) & \textit{se}\ \ \nu\in[1/2,1)\end{cases}$$

6. Due casi concreti

6.1. **Esempio.** Sia $X=\mathbb{C}^2$, $\|x\|_X=\langle x,x\rangle^{1/2}$, $x=(x_1,x_2)$, $\langle y_1,y_2\rangle=\sum_{j=1}^2 y_{1j}\bar{y}_{2j}$, $y_k=(y_{k1},y_{k2})$,

$k=1,2$. Sia E la matrice $\{e_1,e_2\}$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ e siano M e L_1 gli operatori in X rappresentati rispetto ad E dalle rispettive matrici

$\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{M}=\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2}\\ m_{2,1} & m_{2,2}\end{bmatrix},\quad \mathcal{L}_1=\begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{1,2}\\ l_{2,1} & l_{2,2}\end{bmatrix},$$

rango $\mathcal{M}=1$, rango $\mathcal{L}_1=2$.

Sia $l_{i,j}\in\mathbb{C}$. Il problema di identificazione si scrive

$$m_{j,1}v_1'(t)+m_{j,2}v_2'(t)=l_{j,1}v_1(t)+l_{j,2}v_2(t)+f_1(t)z_j(t)+k_j(t)$$

$$m_{j,1}v_1(0)+m_{j,2}v_2(0)=m_{j,1}\xi_1+m_{j,2}\xi_2$$

insieme alle informazioni aggiuntive di compatibilitá

$$\sum_{j=1}^{2}(m_{j,1}v_1(t)+m_{j,2}v_2(t))\bar{w}_j = g_1(t), \quad t\in I_T,$$
$$\sum_{j=1}^{2}(m_{j,1}\xi_1+m_{j,2}\xi_2)\bar{w}_j = g_1(0).$$

Cosí, se (H5) è soddisfatta, il teorema 5.1 si applica. I dettagli sono esposti in Favaron-Favini [7].

6.2. **Esempio.** Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un dominio aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ di classe C^2 e con $(X,\|\cdot\|_X)=(L^p(\Omega),\|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$, $p\in(1.\infty)$.

Sia $\mathcal{M}\in L^\infty(\Omega)$, $m\geq 0$ e sia M l'operatore di moltiplicazione per la funzione $m(\cdot)$.

Riguardo all'operatore L_1, ci limitiamo a considerare condizioni al bordo di tipo Dirichlet:

$$L_1u=-\sum_{|\tilde{\eta}_1|,|\tilde{\eta}_2|=1} D^{\tilde{\eta}_1}(a_{\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2}D^{\tilde{\eta}_2}u)-a_0u,$$

$u\in D(L_1)=W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, dove a_0, $a_{\tilde{\eta}_1}$, $a_{\tilde{\eta}_2}$ soddisfano $a_0\in C(\bar{\Omega})$, $a_{\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2}\in C^1(\bar{\Omega})$, $a_0(x)\geq\nu_0$, $a_{\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2}=a_{\tilde{\eta}_2,\tilde{\eta}_1}\in C^1(\bar{\Omega})$ $a_{\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2}:\Omega\to\mathbb{R}$ per $|\tilde{\eta}_i|=1$, $\tilde{\eta}_i=\eta_{i1},\dots,\eta_{in}$ $\eta_i\in\{0,1\}$, $i=1,2$ e $j=1,\dots,n$

$$\nu_1|y|_n^2\leq\sum_{|\tilde{\eta}_1|,|\tilde{\eta}_2|=1} a_{\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2}(x)y^{\tilde{\eta}_1}y^{\tilde{\eta}_2}\leq\nu_2|y|_n^2, \quad \forall(x,y)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n, \quad \nu_0,\nu_1,\nu_2>0$$

Si pone $A_1=L_1M^{-1}$, $D(A_1)=M(D(L_1))$. Allora $\exists L_1^{-1}\in\mathcal{L}(X,W^{2,p}(\Omega))$. Si prova (cfr. Favini, Lorenzi, Tanabe [9])

$$\|M(\lambda M-L_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\leq c(1+|\lambda|)^{-1/p}, \quad \forall\lambda\in\Sigma_1, \quad \forall p\in(1,+\infty).$$

Cosicchè $\alpha=1$, $\beta=1/p$. Ma per soddisfare (H_1) prendiamo $p\in(1,4/\beta)$

Riguardo a (H_j) per $j=1,\dots,5$, fissiamo $r\in[1,+\infty]$ ed assumiamo per soddisfare (H_j) $j=2,3,4$

$$L_1 v_0 + f(0) \in X_{A_1}^{\varphi_0, r}, \quad \varphi_0 \in (3/p', 1/p), \quad v_0 \in D(L_1),$$
$$(y_1 \dots, y_N) \in \prod_{i=1}^{N} X_{A_1}^{\varphi_i, r}, \quad \varphi_i \in (3/p', 1), \quad i = 1, \dots, n,$$
$$f \in C^{\mu_0}(I_T; X), \quad \mu_0 - 1/2 \in [1/p', 1/2),$$
$$(g_1, \dots, g_N) \in \prod_{i=1}^{N} C^{1+\mu_i}(I_T; \mathbb{C}), \quad \mu_i \in (1/p', 1), \quad i = 1, \dots, N.$$

Sia $\psi_j \in L^{p'}(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$ e siano

$$\Psi_j[u] = \int_\Omega \psi_j(x) u(x) dx, \quad u \in L^p(\Omega).$$

Finalmente, in accordo a (H5), assumiamo che la matrice U sia invertibile e che per uno ξ_0 opportuno valga

$$\sup_{\|u\|_{x=1},\ h=L^{-1}u} \| - [det(U)]^{-1} U_{k,i} \cdot \bar{\Psi}_k[u] y_i - \xi_0 m h \|_X < 1$$

Allora il problema di identificazione degenere (5.1) (5.3) ammette una unica soluzione (v, f_1, f_2) con specificata regolaritá.

Bibliografia

[1] M. Al Horani, A. Favini, Degenerate first order identification problems in Banach spaces, Differential Equations; Inverse and Direct Problems, Edited by A. Favini and A. Lorenzi, Taylor and Francis Group, New York, N.Y. 2006, 1-15.

[2] M. Al Horani, A. Favini, An identification problem for first-order degenerate differential equations, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 130, Number 1 (2006), 41-60.

[3] R. Cross, Multivalued Linear Operators, M. Dekker, Inc., 1998.

[4] R. Cross, A. Favini and Ya. Yakubov, Perturbation results for multivalued linear operators, Parabolic Problems: the Herbert Amann Festschrift, J. Escher, P. Guidotti, M. Hieber, P. M. Bucha, J. W. Prüss, Y. Shibata, G. Simonett, C. Walker, W Zajaczkowski Editors, Birkhäuser Basel AG, 2011, 111-130 .

[5] A. Favaron, A. Favini, Fractional powers in interpolation theory for multivalued linear operators and applications to degenerate differential equations, Tsukuba J. of Mathematics Vol. 35, No.2 (2011), 259-323.

[6] A. Favaron, A. Favini,On the behaviour of singular semigroups in intermediate and interpolation spaces and its applications to maximal regularity for degenerate integro-differential evolution equations, submitted.

[7] A. Favaron, A. Favini, Perturbation methods for inverse problems on degenerate differential equations, submitted.

[8] A. Favini, Perturbation methods and identification problems for degenerate evolution systems, VII Congress of Romanian Mathematicians, June 29 - July 5, 2011, Brasov, Romania.

[9] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe and A. Yagi, An L^p-approach to singular linear parabolic equations in bounded domains, Osaka J. Math. 42 (2005), 385-406.

[10] A. Favini, A. Yagi, Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[11] A. Lunardi, Analytic semigroups amd optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] W. von Wahl, Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Raumen hoelderstetiger Funktionen, Nachr. Akad. Wiss. Gttingen Math.-Phys. Kl. II, (1972), 231258.

Piazza di Porta San Donato, 5 - 40126 Bologna

E-mail address: angelo.favini@unibo.it