# HARNACK INEQUALITIES FOR HYPOELLIPTIC EVOLUTION OPERATORS: GEOMETRIC ISSUES AND APPLICATIONS DISUGUAGLIANZE DI HARNACK PER OPERATORI DI EVOLUZIONE IPOELLITTICI: ASPETTI GEOMETRICI ED APPLICAZIONI

SERGIO POLIDORO

Sommario. Consideriamo Equazioni alle Derivate Parziali lineari del secondo ordine in forma di "somma di quatrati di campi vettoriali di Hörmander più un termine di drift" in un dominio assegnato. Dimostriamo che una disuguaglianza di Harnack vale in ogni sottoinsieme compatto dell'insieme raggiungibile definito in termini dei compi vettoriali considerati. Applichiamo quindi le disuguaglianze di Harnack per dimostrare stime asintotiche dal basso per la densità congiunta di un'ampia classe di processi stocastici. Analoghe stime dall'alto per la densità sono dimostrate per mezzo del Calcolo di Malliavin.

Abstract. We consider linear second order Partial Differentia Equations in the form of "sum of squares of Hörmander's vector fields plus a drift term" on a given domain. We prove that a Harnack inequality holds for every compact subset of the interior of the attainable set defined in terms of the vector fields considered. We then apply the Harnack's inequalities to prove asymptotic lower bounds of the joint density of a wide class of stochastic processes. Analogous upper bounds for the density are proved by Mallilavin's calculus.

2010 MSC. Primary 35H10, 60J60; Secondary 31C05, 60H07.

Keywords. Hypoelliptic Equations, Harnack Inequality, Potential Theory, Malliavin Calculus

Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Vol. 1 (2012) pp. 1–12

Department of Mathematics, University of Bologna.

ISSN 2240-2829.

## 1. Introduzione

In questa nota vengono presentati alcuni risultati ottenuti nel corso di uno studio svolto in collaborazione con Chiara Cinti, dell'Università di Bologna, e con Kaj Nyström, dell'Università di Uppsala [8], successivamente proseguito nel lavoro [7], in collaborazione con Chiara Cinti e Stéphane Menozzi, dell'Università di Evry. Abbiamo dimostrato disuguaglianze di Harnack per una classe di equazioni degeneri della forma seguente

$$\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2(x,t) + X_0(x,t) - \partial_t \tag{1}$$

dove $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, 1 \le m \le N$, i campi $X_0, \dots, X_m$ sono della forma

$$X_j(x,t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i}, \quad a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}), \quad j = 0, \dots, m,$$

e verificano la condizione di Hörmander

$$\text{rank Lie}(X_1, \dots, X_m, X_0 - \partial_t)(x,t) = N+1, \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{2}$$

In questi lavori abbiamo cercato di rispondere alla seguente domanda: *dato un aperto* $\Omega$ *di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *ed un punto* $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, *per quali insiemi* $K \subset \Omega$ *è possibile trovare una costante positiva* $C_K$ *tale che:*

$$\sup_K u \le C_K u(z_0) \quad \textit{per ogni soluzione } u \ge 0 \text{ di } \mathscr{L}u = 0 \textit{ in } \Omega? \tag{3}$$

La caratterizzazione geometrica dei compatti $K$ per cui vale la (3) ci ha dapprima permesso di dimostrare una disuguaglianza di Harnack alla frontiera e, successivamente, di dimostrare stime puntuali della densità di alcuni processi stocastici per i quali erano noti in precedenza solamente risultati parziali. Il risultato del primo lavoro [8] riguarda l'equazione di Kolmogorov

$$\mathscr{K} = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}^2 + \sum_{1i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} - \partial_t \tag{4}$$

e le sue versioni a coefficienti Hölderiani. Per tali operatori è già nota una disuguaglianza di Harnack del tipo (3), dove però l'insieme $K$ è un piccolo intorno di un punto che giace sulla traiettoria di drift che parte dal punto $z_0$ (si vedano i lavori di Kupcov, [13, 14, 15, 16], Garofalo e Lanconelli, [11], Lanconelli e Polidoro [17]). La suddetta versione locale della disuguaglianza (3) e l'invarianza dell'operatore di Kolmogorov rispetto alle traslazioni del gruppo di Lie definito da

$$(x,t)\circ(\xi,\tau) = \left(\xi + \exp\left(-\tau B^T\right)x, t+\tau\right), \quad (x,t),(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{N+1}, \tag{5}$$

sono gli unici ingredienti del lavoro [8] (in (5) la matrice $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ è costituita dai coefficienti dell'equazione in (4)). Il metodo della dimostrazione si basa sulla costruzione di catene di Harnack lungo i cammini ammissibili definiti come segue. Diciamo che il cammino $\gamma : [0,T]\to\mathbb{R}^{N+1}$ è *$\mathscr{L}$-ammissibile* se è assolutamente continuo e soddisfa

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j(s)X_j(\gamma(s)) + \mu(s)Y(\gamma(s)), \quad \text{per quasi ogni } s\in[0,T], \tag{6}$$

dove $Y = X_0 - \partial_t, \omega = (\omega_1,\dots,\omega_m) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, e $\mu$ è una funzione misurabile strettamente positiva. Diciamo che $\gamma$ connette $z_0$ a $z$ se verifica (6) e vale $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(T) = z$. Il problema dell'esistenza di cammini ammissibili è un classico problema di *controllabilità*, la condizione di Hörmander per l'equazione di Kolmogorov è equivalente alla *condizione di controllabilità di Kalman* :

$$\operatorname{rank}\left(C, B^TC,\dots,(B^T)^{N-1}C\right) = N \tag{7}$$

(si veda [18], Theorem 5, p. 81). Qui $C = (c_{i,j})$ è la matrice costante $N\times m$ tale che $c_{i,j} = 1$ se $i = j \in \{1,\dots,m\}$, $c_{i,j} = 0$ altrimenti. Poniamo

$$A_{z_0}(\Omega) = \left\{z\in\Omega \mid \text{esiste } \gamma : [0,T]\to\Omega\ \mathscr{L}\text{-ammissibile che connette } z_0 \text{ a } z\right\}, \tag{8}$$

e definiamo $\mathscr{A}_{z_0} = \mathscr{A}_{z_0}(\Omega) = \overline{A_{z_0}(\Omega)}$ chiusura in $\mathbb{R}^{N+1}$ di $A_{z_0}(\Omega)$. L'insieme $\mathscr{A}_{z_0}$ sarà chiamato *insieme raggiungibile da* $z_0$. Il principale risultato del lavoro [8] è il seguente

**Teorema 1.1.** (THEOREM 2.4 IN [8]). *Sia $\mathscr{K}$ un operatore di Kolmogorov che soddisfa la condizione di Hörmander. Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $z_0\in\Omega$. Per ogni compatto $H\subseteq$ $\operatorname{Int}(\mathscr{A}_{z_0})$, esiste una costante positiva $C_H$, che dipende solo da $\Omega, z_0, H$ e dall'operatore $\mathscr{K}$, tale che*

$$\sup_H u \le C_H u(z_0),$$

*per ogni soluzione positiva $u$ di $\mathscr{K}u = 0$ in $\Omega$.*

## 2. Processi stocastici

Nel lavoro [7], con Chiara Cinti e Stéphane Menozzi, viene applicata una disuguaglianza di Harnack per dimostrare stime asintotiche dal basso per la densità di alcuni processi stocastici. L'analoga stima dall'alto viene dimostrata nello stesso lavoro per mezzo di tecniche probabilistiche basate sul Calcolo di Malliavin. Ci siamo concentrati su due esempi modello:

$$X_t^i = x_i + W_t^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad Y_t = y + \int_0^t |X_s|^k ds, \tag{9}$$

dove $X_s = (X_s^1, \dots, X_s^n)$, $k$ è un qualunque numero naturale *pari* e $|\cdot|$ denota la norma euclidea di un vettore di $\mathbb{R}^n$. Il secondo esempio di processo stocastico considerato è

$$X_t^i = x_i + W_t^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad Y_t = y + \int_0^t \sum_{i=1}^n (X_s^i)^k ds, \tag{10}$$

per un qualunque fissato $k$ naturale. La densità $p$ del processo $(X_t, Y_t)$ in (9) soddisfa l'equazione di Kolmogorov

$$\tfrac{1}{2}\Delta_x p(x,y,t) + |x|^k \partial_y p(x,y,t) = \partial_t p(x,y,t) \tag{11}$$

mentre la densità di $(X_t, Y_t)$ in (10) soddisfa l'equazione

$$\tfrac{1}{2}\Delta_x p(x,y,t) + \sum_{i=1}^n x_i^k \partial_y p(x,y,t) = \partial_t p(x,y,t). \tag{12}$$

Osserviamo che la densità $p$ del processo soluzione di (9) (rispettivamente: di (10)) è la soluzione fondamentale dell'operatore in (11) (rispettivamente: in (12)) con singolarità nell'origine e che, in entrambi i casi, per $k$ pari, il supporto di $p(\cdot, \cdot, t)$ è il semispazio $\{y \geq 0\}$.

I processi stocastici (9) e (10) sono stati studiati da diversi autori, ma i risultati noti sono ancora poco soddisfacenti. Una formula di rappresentazione del processo $(X_t, Y_t)$ per $k = 2$ ed $n = 1$ è stata trovata da Kac per mezzo della trasformata di Laplace [12]. Nella monografia di Borodin e Salminen [5] si trova una formula di rappresentazione in termini di funzioni speciali. Analoghi risultati sono stati provati da Tolmatz [22] relativamente alla densità del *ponte Browniano* precedentemente caratterizzato in un lavoro di Smirnov [21]. Le tecniche dei lavori appena citati, tuttavia, si basano pesantemente sulla risoluzione di problemi di tipo Liouville e non sembra che si possano estendere facilmente al caso di dimensione $n > 1$. Inoltre non sembra facile dedurre stime puntuali della densità dalle formule di [5].

Il principale risultato del lavoro [7] è contenuto nel seguente enunciato:

**Teorema 2.1.** *Fissate $n, k \in \mathbb{N}$, e $T > 0$, esistono due costanti $C \geq 1, c \in ]0,1]$, per cui valgono le seguenti stime per le soluzioni fondamentali di entrambe le equazioni* (11) *e* (12). *Per ogni $t, \in (0,T], y \in \mathbb{R}, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $\eta > y$ se $k$ è pari, si ha:*

i) *se $\frac{|y-\eta|}{t^{k/2+1}}$ è sufficientemente grande, allora:*

$$\frac{C^{-1}}{t^{\frac{n+k}{2}+1}} \exp\Big(-cI(0,y,\xi,\eta,t)\Big) \leq p(0,y,\xi,\eta,t) \leq \frac{C}{t^{\frac{n+k}{2}+1}} \exp\Big(-c^{-1}I(0,y,\xi,\eta,t)\Big),$$

$$I(0,y,\xi,\eta,t) \quad := \quad \frac{|\xi|^2}{t} + \frac{|y-\eta|^{2/k}}{t^{1+2/k}}; \tag{13}$$

ii) *se $x \neq 0$ e $\frac{|x|}{\sqrt{t}}$ è sufficientemente grande, allora:*

$$\frac{C^{-1}}{|x|^{k-1}t^{\frac{n+3}{2}}} \exp\Big(-cI(x,y,\xi,\eta,t)\Big) \leq p(x,y,\xi,\eta,t) \leq \frac{C}{|x|^{k-1}t^{\frac{n+3}{2}}} \exp\Big(-c^{-1}I(x,y,\xi,\eta,t)\Big),$$

$$I(x,y,\xi,\eta,t) \quad := \quad \frac{|x-\xi|^2}{t} + \frac{|y-\eta-\Psi(x)|^{2/k}}{|x|^{2(k-1)}t^3}, \tag{14}$$

*dove $\Psi(x) = |x|^k$ per l'equazione* (9), *$\Psi(x) = \sum_{i=1}^n (x_i)^k$ per l'equazione* (10)*;*

iii) *se $\frac{|y-\eta|}{t^{k/2+1}}$ è sufficientemente piccolo, allora:*

$$\frac{C^{-1}}{t^{\frac{n+k}{2}+1}} \exp\Big(-cI(x,y,\xi,\eta,t)\Big) \leq p(x,y,\xi,\eta,t) \leq \frac{C}{t^{\frac{n+k}{2}+1}} \exp\Big(-c^{-1}I(x,y,\xi,\eta,t)\Big),$$

$$I(x,y,\xi,\eta,t) \quad := \quad \frac{|x|^{2+k}+|\xi|^{2+k}}{|y-\eta|} + \frac{t^{1+2/k}}{|y-\eta|^{2/k}}. \tag{15}$$

Concludo questa introduzione con alcune osservazioni relative al Teorema 2.1. Le stime asintotiche dall'alto e le stime diagonali, che producono il termine $\frac{1}{|x|^{k-1}t^{\frac{n+3}{2}}}$ nel secondo punto del precedente teorema e $\frac{1}{t^{\frac{n+k}{2}+1}}$ negli altri punti, sono state ottenute per mezzo di tecniche basate sul Calcolo di Malliavin. In particolare, le stime diagonali sono confrontabili con quelle provateda Ben Arous e Léandre [3] per processi della forma $X_t^1 = x_1 + W_t^1, X_t^2 = x_2 + \int_0^t (X_s^1)^m dW_s^2 + \int_0^t (X_s^1)^k ds$.

Le stime dal basso sono invece state ottenute con un metodo basato sulla costruzione di Catene di Harnack, introdotto da Aronson [1] nello studio di equazioni paraboliche ed utilizzato da vari autori anche per lo studio di operatori degeneri [23], [19], [10], [6]. La Teoria del Potenziale ci ha fornito disuguaglianze di Harnack utili alla costruzione di catene di Harnack per gli operatori (11) ed (12). L'invarianza degli operatori rispetto ad una famiglia di traslazioni ha un ruolo importante nella dimostrazione delle stime asintotiche. Gli operatori (11) ed (12) non possono essere invarianti per traslazioni se $k > 1$, in quanto l'algebra di Lie calcolata in $(x, y) = (0, 0)$ non è isomorfa all'algebra di Lie calcolata in un qualunque punto dello spazio $(x, y)$ con $x \neq 0$. Questo problema può essere risolto per mezzo della procedura di Lifting introdotta da Rothschild e Stein [20]. Nel caso $k = 2$ è sufficiente aggiungere la variabile $w \in \mathbb{R}^n$ e considerare l'operatore

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \tfrac{1}{2}\Delta_x + |x|^2\partial_y + \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_{w_i} - \partial_t.$$

Una procedura semplice permette di calcolare esplicitamente la legge di gruppo $\circ$:

$$(x, y, , w, t) \circ (\xi, \eta, \omega, \tau) = (x + \xi, y + \eta + 2\langle x, \omega\rangle - \tau|x|2, w + \omega - \tau x, t + \tau),$$

e le relative dilatazioni $\widetilde{\delta}_\lambda$:

$$\widetilde{\delta}_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda^4 y, \lambda^3 w, \lambda^2 t)$$

(si veda [5, Capitolo 1]). Nel caso più generale $k > 2$ ci basiamo su un risultato di Bonfiglioli e Lanconelli [4], che garantisce l'esistenza di una struttura di gruppo di Lie.

## 3. Teoria del Potenziale

Introduciamo alcune notazioni della Teoria del Potenziale e una disuguaglianza di Harnack astratta. Successivamente forniamo una descrizione geometrica degli insiemi in cui vale una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni positive di $\mathscr{L}u = 0$.

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una soluzione regolare di $\mathscr{L}u = 0$ in $\Omega$, diciamo che $u$ è *$\mathscr{L}$-armonica* in $\Omega$. Denotiamo con $\mathscr{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $\mathscr{L}$-armoniche su $\Omega$.

Sia $V$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$ con frontiera Lipschitziana. Diciamo che $V$ è *$\mathscr{L}$-regolare* se, per ogni $z_0 \in \partial V$, esiste un intorno $U$ di $z_0$ e una funzione regolare $w : U \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$w(z_0) = 0, \quad \mathscr{L}w(z_0) < 0, \quad w > 0 \text{ in } \overline{V} \cap U \backslash \{z_0\}.$$

Si noti che la funzione $\psi(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t)$ verifica

$$0 \le \psi \le 1, \qquad \mathscr{L}\psi < 0 \text{ in } \mathbb{R}^{N+1}.$$

Di conseguenza, per il principio del massimo di Picone si ha che, se

$$\mathscr{L}u \ge 0 \text{ in } \Omega, \quad \limsup_{z\to\zeta} u(z) \le 0 \quad \text{per ogni } \zeta \in \partial\Omega,$$

allora $u \le 0$ in $\Omega$. Pertanto, per ogni aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^{N+1}$, che sia $\mathscr{L}$-regolare e per ogni $\varphi \in C(\partial V)$ esiste un'unica funzione $H_\varphi^V$ che soddisfa

$$H_\varphi^V \in \mathscr{H}(V), \quad \lim_{z\to\zeta} H_\varphi^V(z) = \varphi(\zeta) \quad \text{per ogni } \zeta \in \partial V. \tag{16}$$

Inoltre, $H_\varphi^V(z) \ge 0$ per ogni $\varphi \ge 0$. Di conseguenza, se $V$ è $\mathscr{L}$-regolare, per ogni fissato $z \in V$ l'applicazione $\varphi \mapsto H_\varphi^V(z)$ definisce un funzionale lineare e positivo su $C(\partial V)$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste quindi una misura di Radon $\mu_z^V$, con supporto in $\partial V$, tale che

$$H_\varphi^V(z) = \int_{\partial V} \varphi(\zeta)d\mu_z^V(\zeta), \quad \text{per ogni } \varphi \in C(\partial V). \tag{17}$$

La misura $\mu_z^V$ viene detta *misura $\mathscr{L}$-armonica*.

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un insieme aperto. Un sottoinsieme chiuso $F$ di $\Omega$ si dice *insieme assorbente* se, per ogni $z \in F$ e per ogni intorno $\mathscr{L}$-regolare $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ di $z$, si ha $\mu_z^V(\partial V \backslash F) = 0$. Per ogni dato $z_0 \in \Omega$ poniamo

$$\mathscr{F}_{z_0} = \big\{F \subset \Omega : F \ni z_0, F \text{ è un insieme assorbente}\big\}.$$

Si denota con

$$\Omega_{z_0} = \bigcap_{F\in\mathscr{F}_{z_0}} F \tag{18}$$

il più piccolo insieme assorbente contenente $z_0$. La Teoria del Potenziale fornisce la seguente versione astratta della disuguaglianza di Harnack. *Sia $(\mathbb{R}^{N+1}, \mathscr{H})$ uno spazio $\mathfrak{B}$-armonico, sia $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $z_0 \in \Omega$. Allora, per ogni compatto $K \subset \mathrm{Int}(\Omega_{z_0})$ esiste una costante positiva $C_K$ che dipende solamente da $\Omega, K, z_0$ tale che*

$$\sup_K u \le C_K u(z_0), \quad \textit{per ogni } u \in \mathscr{H}(\Omega). \tag{19}$$

(Si veda il Teorema 1.4.4 in [2] e la Proposizione 6.1.5 in [9]). Poiché l'insieme delle funzioni $\mathscr{L}$-armoniche costituisce uno spazio $\mathfrak{B}$-armonico, il risultato enunciato in (19) fornisce una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni di $\mathscr{L}u = 0$. Il seguente lemma costituisce una caratterizzazione geometrica degli insiemi per i quali vale una disuguaglianza di Harnack.

**Lemma 3.1.** *Sia $\mathscr{L}$ un operatore ipoellittico della forma* (1)*, sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $z_0 \in \Omega$. Allora $\mathscr{A}_{z_0} \subseteq \Omega_{z_0}$.*

*Dim.* Poiché $\Omega_{z_0}$ è un insieme chiuso e poiché $\mathscr{A}_{z_0}$ è la chiusura dell'insieme $A_{z_0}$ definito in (8), è sufficiente mostrare che $A_{z_0} \subseteq \Omega_{z_0}$. Supponiamo per assurdo che esista $\overline{z} \in A_{z_0} \backslash \Omega_{z_0}$. Allora esiste un cammino $\mathscr{L}$-ammissibile $\gamma : [0,T] \to \Omega$ tale che $\gamma(0) = z_0, \gamma(T) = \overline{z}$. Poniamo

$$t_1 := \inf \big\{ t > 0 : \gamma(]t,T]) \cap \Omega_{z_0} = \emptyset \big\}.$$

Notiamo che, essendo $\gamma$ una curva continua ed essendo $\Omega \backslash \Omega_{z_0}$ un insieme aperto, la definizione di $t_1 \in [0, T[$ è ben posta e risulta $\gamma(t) \notin \Omega_{z_0}$ per ogni $t \in ]t_1, T]$. Ancora dalla continuità di $\gamma$ segue $z_1 := \gamma(t_1) \in \Omega_{z_0}$. Sia ora $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ un intorno $\mathscr{L}$-regolare di $z_1$ con $\bar{z} \notin \overline{V}$. Sempre grazie alla continuità di $\gamma$, possiamo trovare $t_2 \in ]t_1, T[$ tale che $\gamma([t_1, t_2[) \subset V$ e che $z_2 := \gamma(t_2) \in \partial V$. Consideriamo ora un qualunque intorno $W$ di $z_2$, tale che $W \subseteq \Omega \backslash \Omega_{z_0}$. Sia $\varphi \in C(\partial V)$ una funzione non-negativa, con supporto in $W \cap \partial V$, e tale che $\varphi(z_2) > 0$. Per il principio del minimo la funzione $H_\varphi^V$ è non-negativa. Mostriamo ora che

$$H_\varphi^V(z_1) > 0. \tag{20}$$

Se, per assurdo, fosse $H_\varphi^V(z_1) = 0$, allora per il principio del minimo di Bony si avrebbe $H_\varphi^V \equiv 0$ in $\gamma([t_1, t_2[)$, quindi

$$\varphi(z_2) = \lim_{t \to t_2^-} H_\varphi^V(\gamma(t)) = 0.$$

Questa contraddizione dimostra (20). Utilizzando la formula (17) si trova pertanto

$$H_\varphi^V(z_1) = \int_{\partial V \cap W} \varphi(\zeta) d\mu_{z_1}^V(\zeta) > 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0(\partial V \cap W), \tag{21}$$

o, in altri termini, che $\mu^V_{z_1}(\partial V \cap W) > 0$. D'altra parte $z_1$ appartiene all'insieme assorbente $\Omega_{z_0}$, quindi $\mu^V_{z_1}(\partial V \backslash \Omega_{z_0}) = 0$. Poiché $W \subseteq \Omega \backslash \Omega_{z_0}$, le ultime due affermazioni sono in contraddizione. questo conclude la prova del Lemma. □

**Corollario 3.1.** *Sia $\mathscr{L}$ un operatore ipoellittico della forma* (1)*, sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $z_0 \in \Omega$. Allora per ogni $K$ sottoinsieme compatto di* $\mathrm{Int}(\mathscr{A}_{z_0})$ *esiste una costante positiva $C_K$ che dipende solamente da $\Omega, K, z_0$, tale che*

$$\sup_K u \leq C_K u(z_0),$$

*per ogni soluzione positiva $u$ di $\mathscr{L}u = 0$ in $\Omega$.*

Il precedente Corollario 3.1 restituisce il risultato già dimostrato in [8] per l'equazione di Kolmogorov $k = 1$. Per $k = 2$ si ha che, se consideriamo l'insieme $\Omega = ]-1,1[^n \times ]-1,1[\times]-1,1[^n \times ]-1,1[$ e il punto $z_0 = (0,0,0,0)$ allora risulta

$$\mathscr{A}_{z_0} = \big\{(x,y,w,t) \in \Omega \mid 0 \leq y \leq -t, |w|^2 \leq -ty\big\},$$

E' inoltre facile verificare che si ha in effetti $\Omega_{z_0} = \mathscr{A}_{z_0}$. Infatti la Teoria del Potenziale ci permette di costruire una soluzione di $\mathscr{L}u = 0$ nulla in $\mathscr{A}_{z_0}$, ma strettamente positiva in $\Omega \backslash \mathscr{A}_{z_0}$, che fornisce un immediato controesempio alla disuguaglianza di Harnack.

Va notato che, a differenza di quanto accade per gli operatori che devono le loro proprietà di regolarità prevalentemente alla parte del II ordine e non alla presenza del termine di drift, nel precedente esempio si verifica che il compatto $K$ si trova in una posizione asimmetrica rispetto al dominio considerato. Questo fatto porta ad alcune nuove difficoltà tecniche ed è responsabile di alcuni aspetti tipici delle stime che abbiamo dimostrato.

Concludo questa presentazione enunciando le stime dal basso per le soluzioni positive di (11) per il caso $k = 2$. Tali stime sono alla base della dimostrazione delle stime dal basso della soluzione fondamentale contenute nel Teorema 2.1. Per gli ulteriori dettagli della dimostrazione rimando al lavoro [7].

*Sia $u : \mathbb{R}^{n+1} \times ]T_1, T_2[ \to \mathbb{R}$ una soluzione non-negativa di $\mathscr{L}u = 0$ e siano $t, \tau \in \mathbb{R}$ tali che $T_1 < \tau < t < T_2$, e $t - \tau \leq 2(\tau - T_1)$. Esiste allora una costante $C_1$, che dipende solo dall'operatore $\mathscr{L}$, tale che*

i) *per ogni* $(x, y, t), (\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n+2}$ *tali che* $\eta - y > (t-\tau)\big(|x|^2 + |\xi|^2\big) + (t-\tau)^2$ *e* $t > \tau$ *si ha:*

$$u(\xi, \eta, \tau) \le \exp\left( C_1 \left( \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} + \frac{\eta - y}{(t-\tau)^2} + 1 \right)\right) u(x, y, t);$$

ii) *per ogni* $(x, y, t), (\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n+2}$ *tali che* $0 < \eta - y \le \frac{t-\tau}{6}\big(|x|^2 + |\xi|^2\big) + \frac{(t-\tau)^2}{12}$ *e* $t > \tau$ *si ha:*

$$u(\xi, \eta, \tau) \le \exp\left( C_1 \frac{|x|^4 + |\xi|^4 + (t-\tau)^2}{\eta - y} + 1 \right) u(x, y, t).$$

Come ho detto in precedenza, per dimostrare le stime appena enunciate non è necessario conoscere esplicitamente le traslazioni rispetto a cui l'operatore è invariante. Questo fatto ci ha permesso di rendere il nostro risultato più generale, potendo considerare qualunque esponente $k \in \mathbb{N}$. Per rendere la dimostrazione del tutto indipendente dalla conoscenza esplicita delle operazioni, abbiamo dovuto superare anche la difficoltà di dover individuare la parte interna dell'insieme $\mathscr{A}_{z_0}$. A tal fine, abbiamo considerato il differenziale della *end point map* $E(\omega, \eta)$ che ad ogni funzione $(\omega, \eta) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{m+1})$, con $\eta(t) > 0$ per quasi ogni $t \in [0, T]$, fa corrispondere il punto finale $\gamma(T)$ della soluzione di (6) tale che $\gamma(0) = z_0$. Un risultato generale della teoria del controllo fornisce semplici condizioni sufficienti per la suriettività del differenziale di $E$. Questo risultato ci permette di individuare facilmente alcuni punti interni di $\mathscr{A}_{z_0}$ e, pertanto, di poter applicare la disuguaglianza di Harnack anche senza una caratterizzazione esplicita dell'insieme $\mathscr{A}_{z_0}$.

## Riferimenti bibliografici

[1] D. G. Aronson, *Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967) 890-896.

[2] H. Bauer, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Ausarbeitung einer im Sommersemester 1965 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung. Lecture Notes in Mathematics, No. 22, Springer-Verlag, Berlin, (1966).

[3] G. Ben Arous, R. Léandre, *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale.* II, Probab. Theory Related Fields, **90** (1991) 377-402.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Commun. Pure Appl. Anal., **11** (2012) 1587–1614.

[5] A. N. Borodin, P. Salminen, Handbook of Brownian motionfacts and formulae, Probability and its Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., (2002).

[6] U. Boscain, S. Polidoro, *Gaussian estimates for hypoelliptic operators via optimal control*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **18** (2007) 333-342.

[7] C. Cinti, S. Menozzi, S. Polidoro, *Two-sided bounds for degenerate processes with densities supported in subsets of* $\mathbb{R}^n$, (sottoposto ad una rivista per la pubblicazione), (2012).

[8] C. Cinti, K. Nyström, S. Polidoro, *A note on Harnack inequalities and propagation sets for a class of hypoelliptic operators*, Potential Anal., **33** (2010) 341-354.

[9] C. Constantinescu, A. Cornea, Potential theory on harmonic spaces, Springer-Verlag, New York, 1972. With a preface by H. Bauer, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 158.

[10] M. Di Francesco, S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form*, Advances in Differential Equations, **11** (2006) 1261-1320.

[11] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Level sets of the fundamental solution and Harnack inequality for degenerate equations of Kolmogorov type*, Trans. Amer. Math. Soc., **321** (1990) 775-792.

[12] M. Kac, *On distributions of certain Wiener functionals*, Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949) 113.

[13] L. P. Kupcov, *Harnack's inequality for generalized solutions of second order degenerate elliptic equations*, Differencialnye Uravnenija, **4** (1968) 110-122.

[14] ——, *The fundamental solutions of a certain class of elliptic-parabolic second order equations*, Differencialnye Uravnenija, **8** (1972) 1649-1660.

[15] ——, *The mean value property and the maximum principle for second order parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **242** (1978) 529532.

[16] ——, *On parabolic means*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **252** (1980) 296-301.

[17] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **52** (1994) 29-63. Partial differential equations, II (Turin, 1993).

[18] E. B. Lee, L. Markus, Foundations of optimal control theory, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL, second ed., 1986.

[19] S. Polidoro, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **137** (1997) 321-340.

[20] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., **137**, 3-4 (1976) 247-320.

[21] N. Smirnov, *Sur la distribution de* $\omega^2$ *(criterium de M. von Mises)*, C. R. Acad. Sci. Paris, **202** (1936) 449-452.

[22] L. Tolmatz, *Asymptotics of the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian bridge for large arguments*, Ann. Probab., **28** (2000) 132-139.

[23] N. T. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, Analysis and geometry on groups, vol. 100 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche, via Campi 213/b, 41125, Modena.

*E-mail address*: `sergio.polidoro@unimore.it`