Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2010-11

Sergio Polidoro

Disuguaglianze di Harnack alla frontiera per equazioni di Kolmogorov

3 marzo 2011

Abstract

We prove boundary Harnack inequalities for positive solutions u to second order degenerate differential Kolmogorov equations in the form

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{m} a_i(z)\partial_{x_i} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u,$$

where $z = (x,t)$ belongs to some bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, and $1 \le m \le N$. We assume that u continuously vanishes in some set $\Sigma \subset \partial\Omega$ that satisfies a suitable uniform cone condition. We also prove Carleson type estimates, that are scale-invariant and generalize previous results valid for second order uniformly parabolic equations.

1. Introduzione

Presento uno studio svolto in collaborazione con Chiara Cinti e con Kaj Nyström, dell'Università di Umeå, i cui risultati sono apparsi nei lavori [5], [4] e [6].

Abbiamo dimostrato disuguaglianze di Harnack alla frontiera e stime di tipo Carleson per una classe di equazioni di Kolmogorov degeneri, della forma seguente

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(z)\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j} - \partial_t, \tag{1}$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $1 \le m \le N$, i coefficienti $a_{i,j}$ e a_i sono continui e limitati, e $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ è una matrice costante. Una delle motivazioni principali di questa ricerca è il progetto di costruire la teoria della regolarità della frontiera libera per il problema dell'ostacolo

$$\begin{cases} \max\left\{\mathscr{L}u, \varphi - u\right\} = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \times \,]0,T[, \\ u(x,0) = \varphi(x,0), & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

studiato in collaborazione con Di Francesco e Pascucci in [9]. Ricordiamo che nei lavori [19] e [30], in collaborazione con Frentz, Nyström e Pascucci, sono stati provati risultati di regolarità ottimale della soluzione del suddetto problema dell'ostacolo. Oltre alle applicazioni al problema dell'ostacolo, i risultati di regolarità alla frontiera per le equazioni di Kolmogorov hanno interesse dal punto di vista teorico, in quanto richiedono di adattare i metodi utilizzati nello studio degli operatori ellittici e parabolici alla geometria non euclidea dei gruppi di Lie. A questo proposito ricordiamo analoghi lavori di Ferrari e Franchi [18] e [17], Danielli, Garofalo e Salsa [8] e di Danielli, Garofalo e Petrosyan [7] che riguardano lo studio di operatori ipoellittici su gruppi di Carnot.

Lo studio del comportamento alla frontiera per le soluzioni positive dell'equazione parabolica $Lu = 0$ ha raggiunto un livello piuttosto avanzato. Per quanto riguarda gli operatori in forma di divergenza la teoria è stata sviluppata nei lavori di Fabes e Kenig [13], Fabes e Stroock [16], Garofalo [20], Krylov e Safonov [25], ed è stata completata da Fabes, Safonov e Yuan in [15] e [31]. Lo sviluppo della teoria per la forma di non divergenza è dovuto a Fabes, Garofalo e Salsa [12], Fabes e Safonov [14], Nyström [29]. Operatori ellittici, sia in forma di divergenza che in forma di non divergenza, sono stati studiati da

Bauman [1], Caffarelli, Fabes, Mortola e Salsa [2], Fabes, Garofalo, Marin-Malave e Salsa [11], Jerison e Kenig [23]. Ricordiamo infine che operatori ellittici in forma di divergenza con coefficienti di ordine inferiore singolari sono stati studiati da Kenig e Pipher [24] e da Hofmann e Lewis [21].

Elenchiamo le ipotesi sull'operatore $\mathscr{L}$ in (1).

[H.1]: La matrice $A_0(z) = (a_{i,j}(z))_{i,j=1,\dots,m}$ è simmetrica ed uniformemente positiva in $\mathbb{R}^m$: esiste $\lambda > 0$ tale che

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(z)\xi_i\xi_j \le \lambda|\xi|^2, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

[H.2]: L'operatore a *coefficienti costanti*

$$\mathscr{K} = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}^2 + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} - \partial_t \tag{2}$$

è ipoellittico.

[H.3]: I coefficienti $a_{i,j}(z)$ e $a_i(z)$ sono limitati ed appartengono allo spazio di funzioni Hölderiane $C^{0,\alpha}_K(\mathbb{R}^{N+1})$, $\alpha \in]0,1]$, definito in (16).

L'operatore $\mathscr{K}$ può essere scritto nella forma

$$\mathscr{K} = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + Y,$$

dove

$$X_j = \partial_{x_j}, \quad i = 1,\dots,m, \qquad Y = \langle x, B\nabla\rangle - \partial_t, \tag{3}$$

e l'ipotesi **[H.2]** è equivalente alla condizione di Hörmander [22],

$$\text{rank Lie}\,(X_1,\dots,X_m,Y)\,(z) = N+1, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{4}$$

L'operatore $\mathscr{K}$ in (2) è invariante rispetto al gruppo di Lie definito dall'operazione

$$(x,t)\circ(\xi,\tau) = (\xi + \exp(-\tau B^T)x, t+\tau), \qquad (x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{5}$$

I campi vettoriali $X_1,\dots,X_m$ ed Y sono invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra definite da (5), nel senso che

$$X_j\,(u(\zeta\circ\,\cdot\,)) = (X_j u)\,(\zeta\circ\,\cdot\,), \quad j=1,\dots,m, \qquad Y\,(u(\zeta\circ\,\cdot\,)) = (Yu)\,(\zeta\circ\,\cdot\,) \tag{6}$$

per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ (quindi $\mathscr{K}\left(u(\zeta\circ\cdot)\right) = \left(\mathscr{K}u\right)(\zeta\circ\cdot)$). Ricordiamo inoltre che **[H.2]** è equivalente al fatto che esiste una base di $\mathbb{R}^N$ tale che B assume la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_\kappa \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \tag{7}$$

dove B_j è una matrice $m_{j-1}\times m_j$ di rango m_j per $j\in\{1,\ldots,\kappa\}$, $1\leq m_\kappa\leq\ldots\leq m_1\leq m_0 = m$ e $m+m_1+\ldots+m_\kappa = N$, mentre i blocchi $*$ sono arbitrari (si veda [26]). Sulla base di (7) possiamo introdurre la famiglia di dilatazioni $(\delta_r)_{r>0}$ on $\mathbb{R}^{N+1}$ definite da

$$\delta_r = (D_r, r^2) = \mathrm{diag}(rI_m, r^3 I_{m_1}, \ldots, r^{2\kappa+1} I_{m_\kappa}, r^2), \tag{8}$$

dove I_k, $k\in\mathbb{N}$, è la matrice identità $k\times k$. Per semplicità, faremo l'ipotesi seguente.

[H.4]: L'operatore $\mathscr{K}$ in (2) è δ_r-omogeneo di grado due, i.e.

$$\mathscr{K}\circ\delta_r = r^2(\delta_r\circ\mathscr{K}), \qquad \forall\, r>0.$$

Ricordiamo che **[H.4]** è soddisfatta se, e solo se, ogni blocco $*$ in (7) è nullo (si veda [26]). Poniamo

$$\mathbf{q} = m + 3m_1 + \ldots + (2\kappa+1)m_\kappa,$$

e diciamo che $\mathbf{q}+2$ è la *dimensione omogenea* di $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto alle dilatazioni $(\delta_r)_{r>0}$.

Consideriamo il problema di valori al contorno

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

dove Ω è un qualunque aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e $\varphi\in C(\partial\Omega)$. Il metodo di Perron-Wiener-Brelot garantisce l'esistenza di una soluzione del problema, che tuttavia non assume il dato al bordo φ in ogni punto di $\partial\Omega$. Se indichiamo con u_φ la soluzione di (9), denotiamo

$$\partial_K\Omega = \left\{ z\in\partial\Omega \mid \lim_{w\to z} u_\varphi(w) = \varphi(z) \text{ per ogni } \varphi\in C(\partial\Omega)\right\}. \tag{10}$$

Chiameremo $\partial_K \Omega$ *frontiera regolare* di Ω rispetto all'operatore $\mathscr{L}$. Ricordiamo che Manfredini in [28, Proposition 6.1] ha fornito condizioni sufficienti per la regolarità dei punti di frontiera rispetto ad $\mathscr{L}$. Tali condizioni sono geometriche e sono in accordo con la classificazione di Fichera. Diciamo che un vettore $\nu \in \mathbb{R}^{N+1}$ è una *normale esterna ad* Ω nel punto $z \in \partial\Omega$ se esiste un r positivo tale che $B(z + r\nu, r) \cap \Omega = \emptyset$. Qui $B(z + r\nu, r)$ indica la palla euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$ di centro $z + r\nu$ e raggio r. Se $z \in \partial\Omega$ e $\nu = (\nu_1, ..., \nu_{N+1})$ è una normale esterna ad Ω in z, allora vale il seguente risultato:

$$\begin{aligned} &a) \text{ Se } (\nu_1, \dots, \nu_m) \neq 0, \text{ allora } z \in \partial_K \Omega, \\ &b) \text{ se } (\nu_1, \dots, \nu_m) = 0 \text{ e } \langle Y(z), \nu \rangle > 0, \text{ allora } z \in \partial_K \Omega, \\ &c) \text{ se } (\nu_1, \dots, \nu_m) = 0 \text{ e } \langle Y(z), \nu \rangle < 0, \text{ allora } z \notin \partial_K \Omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Qui Y è il campo vettoriale definito in (3). La condizione (a) è spesso espressa dicendo che z è un punto *non caratteristico per l'operatore* $\mathscr{L}$. Una condizione sufficiente per la regolarità, più raffinata della precedente, è data in [28, Theorem 6.3] ed è espressa in termini di *condizione di cono esterno* (si veda la Definizione 4.1 nel seguito).

Per la definizione di $\mathscr{A}_{\widetilde{z}}$ rimandiamo alla formula (28), e per la condizione di cono interno ed esterno rimandiamo alla Definizione 4.1. Il nostro primo risultato è il seguente.

Teorema 1.1. (Theorem 1.2 in [4]) *Sia $\mathscr{L}$ un operatore nella forma* (1)*, verificante le ipotesi* [**H.1-4**]*, sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Sia Σ un sottoinsieme aperto di $\partial\Omega$, sia K un compatto di $\overline{\Omega}$ e sia $\widetilde{z} \in \Omega$. Supponiamo che $K \cap \partial\Omega \subset \Sigma$, e che $K \subset \mathrm{Int}(\mathscr{A}_{\widetilde{z}})$ (rispetto alla topologia di $\overline{\Omega}$). Supponiamo che Σ soddisfi una condizione uniforme di cono esterneo ed interno e che esista un aperto $V \subset \mathbb{R}^{N+1}$ ed una costante positiva $\bar{c}$, tale che*

$$\begin{aligned} &i) \quad K \cap \Sigma \subseteq V, \\ &ii) \quad \textit{per ogni } z \in V \cap \Omega \textit{ esiste una coppia } (w, s) \in \Sigma \times \mathbb{R}^+ \\ &\qquad \textit{con } z = w \circ \delta_s(\bar{x}, \bar{t}), \textit{ e } d_K(w \circ \delta_s(\bar{x}, \bar{t}), \Sigma) \geq \bar{c}\, s. \end{aligned}$$

Allora esiste una costante positiva C_K, che dipende solamente da $\Omega, \Sigma, K, \widetilde{z}$ e da $\mathscr{L}$, tale che

$$\sup_K u \leq C_K\, u(\widetilde{z}),$$

per ogni u soluzione positiva di $\mathscr{L}u = 0$ in Ω tale che $u_{|\Sigma} = 0$.

Nel caso in cui la frontiera di Ω sia una superficie *regolare*, è possibile fornire semplici condizioni sufficienti per la validità delle ipotesi *(i)* ed *(ii)* del Teorema 1.1. Tali condizioni si scrivono in termini della caratterizzazione di Fichera dei punti di frontiera (11): se esiste un intorno $W \subset \mathbb{R}^{N+1}$ of $\widetilde{w} \in \Sigma$ tale che $\Sigma \cap W$ sia una varietà N-dimensionale, allora una delle due condizioni seguenti

a) $\quad (\nu_1(\widetilde{w}), \dots, \nu_m(\widetilde{w})) \neq 0,$ oppure

b) $\quad (\nu_1(z), \dots, \nu_m(z)) = 0$ per ogni $z \in W \cap \Sigma$, e $\langle Y(\widetilde{w}), \nu(\widetilde{w})\rangle > 0.$

garantisce la condizione di cono esterno ed interno e la validità delle *(i)* ed *(ii)* del Teorema 1.1. Osserviamo che la condizione *(b)* è soddisfatta quando Σ è il grafico di una funzione $t = g(x)$, dove g non dipende da $(x_1, \dots, x_m)$. In particolare, nel caso uniformemente parabolico, questo significa che Σ è un sottoinsieme di un piano del tipo $\{t = t_0\}$, mentre nel caso degenere esiste una famiglia più ricca di superfici che sodisfano la condizione *(b)*. La validità della condizione di cono esterno ed interno e delle *(i)* ed *(ii)* del Teorema 1.1 è garantita anche sotto l'ipotesi che la superficie Σ sia Lip(1,1/2) nel senso della classica geometria parabolica, o appartenga alla classe Lip_K definita in termini delle dilatazioni (8).

Il nostro secondo Teorema fornisce un risultato di tipo Carleson, che ha la caratteristica di essere invariante rispetto alle dilatazioni. Tale risultato costituisce uno strumento fondamentale nello studio della regolarità della frontiera libera. Rimandiamo alla Definizione 2.1 per il significato di superfici Lip_K e alle (19), (20) per la notazione $Q_{M,r}(x_0,t_0)$.

Teorema 1.2. (Theorem 1.1 in [6]) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $\Sigma \subset \partial\Omega$ una superficie Lip_K di costanti M ed r_0. Allora esistono due costanti positive C, c, che dipendono solamente da $\mathscr{L}$ e da M, tali che*

$$\sup_{Q_{M,cr}(x_0,t_0)\cap\Omega} u(x,t) \le C\, u\big(A_r^+(x_0,t_0)\big), \qquad A_r^+(x_0,t_0) = (x_0,t_0) \circ \delta_r(\widetilde{x},\widetilde{t}),$$

per ogni $(x_0,t_0)\in\Sigma$, *per ogni* u *soluzione positiva di* $\mathscr{L}u=0$ *in* Ω *nulla in* $Q_{M,r}(x_0,t_0)\cap\partial\Omega$, *e per ogni* $r\in\,]0,r_0]$. *Qui* $(\widetilde{x},\widetilde{t})\in\mathbb{R}^{N+1}$ *è tale che*

$$\|(\widetilde{x},\widetilde{t})\|_K\le C,\qquad d_K\big(A_r^+(x_0,t_0),\partial\Omega\big)\ge cr,$$

per ogni $r\in\,]0,r_0[$.

Il precedente risultato è stato dimostrato per la prima volta da Carleson [3] nello studio di teoremi di Fatou per funzioni armoniche. La prima estensione al caso parabolico è dovuta a Salsa [32, Theorem 3.1], che ha considerato cilindri della forma $\Omega\times]0,T[$, con Ω dominio Lipschitziano di $\mathbb{R}^N$.

2. Funzioni e superfici Lip_K

In questo paragrafo diamo la definizione di funzioni e superfici Lip_K. A tal fine dobbiamo introdurre alcune notazioni. Scriviamo innanzitutto le dilatazioni (8) nella forma seguente

$$\delta_r=\mathrm{diag}(r^{\alpha_1},\dots,r^{\alpha_N},r^2). \tag{12}$$

dove abbiamo posto $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=1$, e $\alpha_{m+m_1+\cdots+m_{j-1}+1}=\ldots=\alpha_{m+m_1+\cdots+m_j+1}=2j+1$ per $j=1,\dots,\kappa$. Coerentemente con la (8), decomponiamo il vettore $x\in\mathbb{R}^N$ come segue

$$x=\big(x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(\kappa)}\big),\qquad x^{(0)}\in\mathbb{R}^m,\quad x^{(j)}\in\mathbb{R}^{m_j},\quad j\in\{1,\dots,\kappa\}, \tag{13}$$

e definiamo

$$|x|_K=\sum_{j=0}^{\kappa}\left|x^{(j)}\right|^{\frac{1}{2j+1}},\qquad \|(x,t)\|_K=|x|_K+|t|^{\frac12}.$$

Si noti che $\|\delta_r z\|_K=r\|z\|_K$ per ogni $r>0$ e $z\in\mathbb{R}^{N+1}$. Vale una disuguaglianza pseudo-triangolare:

$$\|z^{-1}\|_K\le\mathbf{c}\|z\|_K,\qquad \|z\circ\zeta\|_K\le\mathbf{c}(\|z\|_K+\|\zeta\|_K),\qquad z,\zeta\in\mathbb{R}^{N+1}, \tag{14}$$

per un'opportuna costante positiva $\mathbf{c}$. Si definisce la *palla* della metrica relativa al gruppo di Lie ponendo

$$\mathcal{B}_K(z_0,r):=\{z\in\mathbb{R}^{N+1}\mid d_K(z,z_0)<r\},\qquad d_K(z,\zeta):=\|\zeta^{-1}\circ z\|_K. \tag{15}$$

Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è Hölderiana di esponente $\alpha \in]0,1]$, in breve $f \in C^{0,\alpha}_K(\Omega)$, se esiste una constante positiva C tale che

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq C\, d_K(z,\zeta)^\alpha, \qquad \text{per ogni } \ z,\zeta \in \Omega. \tag{16}$$

Diamo la definizione di funzioni e superfici Lip_K. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$x' = x_1 \quad \text{ed} \quad x'' = (x_2, \dots, x_N)\,. \tag{17}$$

Utilizzando la notazione in (13) poniamo poi $x^{(0)}_{\prime} = x_1 = x'$, e $x^{(0)}_{\prime\prime} = (x_2, \dots, x_m)$. Con queste notazioni definiamo la norma

$$\|(x'',t)\|''_K = \left|x^{(0)}_{\prime\prime}\right| + \sum_{j=1}^{\kappa} \left|x^{(j)}\right|^{\frac{1}{2j+1}} + |t|^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

in $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Ricordando (8), denotiamo poi

$$D''_r = \mathrm{diag}\big(rI_{m-1}, r^3 I_{m_1}, \dots, r^{2\kappa+1} I_{m_\kappa}\big),$$

in modo che risulti $D''_r x'' = (D_r x)''$, mentre $(D_r x)' = rx'$. Notiamo che $\|(D''_r x'', r^2 t)\|''_K = r\|(x'',t)\|''_K$ per ogni $r > 0$ e $(x'',t) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Utilizzando la notazione in (12) poniamo, per ogni scelta di r_1, r_2, r_3 positivi,

$$\begin{aligned} Q_{r_1,r_2,r_3} &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid |x'| \leq r_1, |x_i| \leq r_2^{\alpha_i} \text{ per ogni } i = 2, \dots, N,\ |t| \leq r_3^2\}, \\ Q''_{r_2,r_3} &= \{(x'',t) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid |x_i| \leq r_2^{\alpha_i} \text{ per ogni } i = 2, \dots, N,\ |t| \leq r_3^2\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Per ogni M ed r positivi e per ogni punto $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, definiamo

$$Q_{M,r} = Q_{4Mr,r,\sqrt{2}r}, \qquad Q''_r = Q''_{r,\sqrt{2}r}, \qquad Q_{M,r}(z_0) = z_0 \circ Q_{M,r}. \tag{20}$$

Si noti che $Q_{M,r} = \delta_r Q_{M,1}$ e $Q''_r = D''_r Q''_1$ per ogni $r > 0$. Inoltre, la continuità della legge di gruppo (5) assicura l'esistenza di $\varepsilon = \varepsilon(\mathscr{L}, M) \in]0,1[$ tale che

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) \in Q_{M,r} \qquad \forall\, (\xi,\tau) \in Q_{M,\varepsilon r}, \quad \forall\, (x,t) \in Q_{M,\frac{r}{2}}. \tag{21}$$

Inoltre, per ogni M positivo, esistono due costanti positive c'_M, c''_M tali che

$$\mathcal{B}_K(z_0, c'_M r) \subseteq Q_{M,r}(z_0) \subseteq \mathcal{B}_K(z_0, c''_M r), \tag{22}$$

per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r > 0$.

Sia $e' \in \mathbb{R}^m$ tale che $\|e'\| = 1$. Poiché la rotazione rispetto alle prime m variabili lascia invariata la forma della matrice B in (7), non è restrittivo supporre $e' = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dato un qualunque aperto $\Omega'' \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, diciamo che $f : \Omega'' \to \mathbb{R}$ è una *funzione* Lip_K *rispetto ad* e', se $x' = x_1$ e

$$\left| f\big((x + \exp(-tB^T)x_0)'', t + t_0 \big) - f(x_0'', t_0) \right| \le M \, \|(x'', t)\|_K'', \tag{23}$$

per ogni $(x_0'', t_0) \in \Omega''$, e $(x'', t) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ tali che $\big((x + \exp(-tB^T)x_0)'', t + t_0 \big) \in \Omega''$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $(x_0, t_0) = (0, 0)$ ed $f(0, 0) = 0$. Infatti, per ricondursi al caso appena detto, è sufficiente porre $g(x'', t) = f\big((x + \exp(-tB^T)x_0)'', t + t_0 \big) - f(x_0'', t_0)$. Equivalentemente, $f : \Omega'' \to \mathbb{R}$ è Lip_K se

$$\left| f(x'', t) - f(\xi'', \tau) \right| \le M \left\| \big((x - \exp((\tau - t)B^T)\xi)'', t - \tau \big) \right\|_K'', \tag{24}$$

per ogni $(x'', t), (\xi'', \tau) \in \Omega''$. Data una funzione f come sopra, con $f(0, 0) = 0$ d $M, r > 0$, definiamo

$$\Omega_{f,r} = \{ (x, t) \in Q_{M,r} \mid f(x'', t) < x' \}, \quad \Delta_{f,r} = \{ (x, t) \in Q_{M,r} \mid f(x'', t) = x' \}, \tag{25}$$

ed infine poniamo

$$\Omega_{f,r}(z_0) = z_0 \circ \Omega_{f,r}, \quad \Delta_{f,r}(z_0) = z_0 \circ \Delta_{f,r}, \qquad z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Definizione 2.1. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un dominio limitato. Diciamo che* $\Sigma \subset \partial\Omega$ *è una* superficie Lip_K di costanti $M = \max\{M_1, \dots, M_k\}$ ed $r_0 = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ *se, per ogni* $j = 1, \dots, k$, *esiste un punto* $z_j \in \Sigma$, *ed una funzione* $f_j : Q''_{2r_j} \to \mathbb{R}$ *rispetto ad un certo* $e_j' \in \mathbb{R}^m$, *di classe* Lip_K *con costante di Lipschitz* M_j, *tale che*

$$\Sigma \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_{f_j, r_j}(z_j), \quad \Sigma \cap Q_{M_j, 2r_j}(z_j) = \Delta_{f_j, 2r_j}(z_j) \quad \Omega \cap Q_{M_j, 2r_j}(z_j) = \Omega_{f_j, 2r_j}(z_j).$$

Come già osservato nell'Introduzione, se $\Sigma \subset \partial\Omega$ è localmente il grafico di una funzione $\{x_j = f(x'', t)\}$ di classe $\mathrm{Lip}(1, 1/2)$ rispetto ad un indice $j \in \{1, \dots, m\}$, allora Σ è una superficie Lip_K.

3. Disuguaglianze di Harnack interne

Diciamo che il cammino $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^{N+1}$ è $\mathscr{L}$-*ammissibile* se è assolutamene continuo e soddisfa

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(s) X_j(\gamma(s)) + \mu(s) Y(\gamma(s)), \qquad \text{per quasi ogni } s \in [0,T], \tag{26}$$

dove $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, e μ è una funzione misurabile strettamente positiva. Diciamo che γ *connette* z_0 *a* z se $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(T) = z$. Il problema dell'*esistenza* di cammini ammissibili, è un classico problema di *controllabilità*, la condizione [**H.2**] è equivalente alla *condizone di controllabilità di Kalman*:

$$\operatorname{rank}\Big(\bar{A} \;\; B^T\bar{A} \;\; \cdots \;\; \big(B^T\big)^{N-1}\bar{A}\Big) = N. \tag{27}$$

Qui $\bar{A}$ è la matrice $N \times N$ definita da

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condizione (27) è sufficiente per la *controllabilità globale* del problema (26), (si veda [27], Theorem 5, p. 81). Poniamo

$$A_{z_0}(\Omega) = \big\{ z \in \Omega \mid \text{esiste } \gamma : [0,T] \to \Omega \ \mathscr{L}\text{-amissibile che connette } z_0 \text{ a } z \big\}, \tag{28}$$

e definiamo $\mathscr{A}_{z_0} = \mathscr{A}_{z_0}(\Omega) = \overline{A_{z_0}(\Omega)}$ chiusura (in $\mathbb{R}^{N+1}$) di $A_{z_0}(\Omega)$. L'insieme $\mathscr{A}_{z_0}$ sarà chiamato *insieme raggiungibile da* z_0. Uno dei nostri risultati principali è il seguente

Teorema 3.1. (Theorem 2.4 in [4]) *Sia $\mathscr{L}$ un operatore della forma* (1)*, che soddisfa le ipotesi* [**H.1-3**]. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $z_0 \in \Omega$. Per ogni compatto $H \subseteq \operatorname{Int}(\mathscr{A}_{z_0})$, esiste una costante positiva C_H, che dipende solo da Ω, z_0, H e dall'operatore $\mathscr{L}$, tale che*

$$\sup_H u \le C_H \, u(z_0),$$

per ogni soluzione positiva u di $\mathscr{L}u = 0$ in Ω.

La seguente Proposizione 3.1 è conseguenza di [10, Theorem 1.2] e [10, Lemma 6.2]. Per ogni r, β positivi e per $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ poniamo, in base alla notazione (19),

$$
\begin{aligned}
&Q_r^- = Q_{r,r,r} \cap \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t < 0\big\}, \qquad Q_r^-(x_0,t_0) = (x_0,t_0) \circ Q_r^-, \\
&K_{\beta r} = Q_{\beta r, \beta r, r} \cap \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t = -r^2/2\big\}, \qquad K_{\beta r}(x_0,t_0) = (x_0,t_0) \circ K_{\beta r}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Proposizione 3.1. *Sia γ un cammino $\mathscr{L}$-ammissibile che soddisfa $\gamma(0) = (x_0, t_0)$. Esistono due costanti positive h e C tali che*

$$
\int_0^s |\omega(\tau)|^2 d\tau \le h \qquad \Rightarrow \quad u(\gamma(s)) \le C\, u(x_0,t_0),
$$

per ogni soluzione positiva u di $\mathscr{L}u = 0$ in $Q_1^-(x_0,t_0)$ ed $s \in]0, 1/2]$.

4. Stime al bordo

Introduciamo una famiglia di coni definiti in termini di dilatazioni δ_λ e di traslazioni "$\circ$". Per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$, consideriamo un intorno $U \subset \mathbb{R}^N$ di $\bar{x}$, e denotiamo con $Z^-_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0)$ e $Z^+_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0)$ i seguenti *coni*

$$
\begin{aligned}
Z^-_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0) &= \big\{z_0 \circ \delta_s(x, -\bar{t}) \mid x \in U,\, 0 < s \le 1\big\}, \\
Z^+_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0) &= \big\{z_0 \circ \delta_s(x, \bar{t}) \mid x \in U,\, 0 < s \le 1\big\}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Nel seguito, per semplificare le notazioni, quando la scelta di $\bar{x}, \bar{t}, U$ sarà chiara dal contesto, scriveremo $Z^\pm(z_0)$ invece di $Z^\pm_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0)$. Notiamo che $Z^-(z_0)$ e $Z^+(z_0)$ sono coni con lo stesso vertice $z_0 = (x_0, t_0)$, ma la base di $Z^-(z_0)$ è collocata al livello $t_0 - \bar{t} < t_0$, mentre la base di $Z^+(z_0)$ è al livello $t_0 + \bar{t} > t_0$.

Definizione 4.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $\Sigma \subset \partial\Omega$.*

(i) *Diciamo che Σ soddisfa una* condizione di cono esterno uniforme *se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^N, \bar{t} > 0$ ed un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ di $\bar{x}$ tale che*

$$
Z^-(z_0) \cap \Omega = \emptyset \qquad \textit{per ogni} \quad z_0 \in \Sigma,
$$

dove $Z^-(z_0) = Z^-_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0)$.

(ii) *Diciamo che Σ soddisfa una* condizione di cono interno uniforme *se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^N, \bar{t} > 0$ ed un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ di $\bar{x}$ tale che*

$$
Z^+(z_0) \subset \Omega \qquad \textit{per ogni} \quad z_0 \in \Sigma,
$$

dove $Z^+(z_0) = Z^+_{\bar{x},\bar{t},U}(z_0)$. *Richiediamo inoltre che il cammino* $s \mapsto (x_0, t_0) \circ \delta_{1-s}(\bar{x}, \bar{t})$ *sia* $\mathscr{L}$*-ammissibile.*

E' abbastanza semplice verificare che ogni superficie Σ di classe Lip_K soddisfa, localmente, una condizione di cono esterno uniforme. Al fine di verificare la condizione di cono interno, mostriamo ora come è possibile costruire un cammino $s \mapsto (x_0, t_0) \circ \delta_{1-s}(\bar{x}, \bar{t})$ che sia $\mathscr{L}$-ammissibile. Ricordiamo preliminarmente le notazioni (7) e (13) e denotiamo con e' un versore di $\mathbb{R}^m$ che punta nella direzione rispetto a cui Σ è un grafico Lip_K.

Lemma 4.1. *Per ogni* Λ *positivo definiamo un punto* $x_\Lambda \in \mathbb{R}^N$ *come segue:*

$$x_\Lambda^{(0)} = \Lambda\, e', \qquad x_\Lambda^{(j)} = -\frac{2}{2j+1}\, B_j^T x_\Lambda^{(j-1)}, \qquad j = 1, \dots, \kappa. \tag{31}$$

Allora il cammino $[0,1] \ni s \to \gamma(s) = \delta_{1-s}(x_\Lambda, 1)$ *è* $\mathscr{L}$*-ammissibile.*

Dim. E' sufficiente verificare che γ soddisfa (26), in altri termini che

$$\gamma'(s) = \bar{A}_0\, \omega(s) + \mu(s)\big(B^T\gamma(s) - \partial_t\big) \qquad \text{q.d. in } [0,1], \tag{32}$$

per un'opportuna funzione $\omega \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ e per una funzione positiva e misurabile μ. Un conto diretto mostra che

$$\gamma(s) = \Bigg((1-s)\, x_\Lambda^{(0)}, -\frac{2}{3}(1-s)^3 B_1^T x_\Lambda^{(0)}, \dots, \\ \frac{(-2)^\kappa}{(2\kappa+1)!!}(1-s)^{2\kappa+1} B_\kappa^T \cdots B_1^T x_\Lambda^{(0)}, (1-s)^2 \Bigg),$$

da cui segue che

$$\gamma'(s) = \big(-x_\Lambda^{(0)}, 0, \dots, 0\big) + 2(1-s)\big(B^T\gamma(s) - \partial_t\big), \qquad s \in [0,1].$$

Questo prova (32) con $\omega = -x_\Lambda^{(0)}$ e $\mu(s) = 2(1-s)$. $\square$

Il seguente risultato richede che il cammino $s \mapsto (x_0, t_0) \circ \delta_{1-s}(\bar{x}, \bar{t})$ sia $\mathscr{L}$-ammissibile. Come osservato in [4, Remark 4.2], esistono coni che non soddisfano tale condizione e per i quali il risultato enunciato nel Lemma 4.2 non vale.

Lemma 4.2. *Sia* $Z^+_{\bar{x},\bar{t},U}(0,0)$ *un cono tale che il cammino* $s \mapsto (x_0,t_0) \circ \delta_{1-s}(\bar{x},\bar{t})$ *sia* $\mathscr{L}$*-ammissibile. Allora esistono due costanti positive* C_1 *e* β*, che dipendono solo da* Z^+ *e dall'operatore* $\mathscr{L}$*, tali che*

$$u(\delta_s(\bar{x},\bar{t})) \leq \frac{C_1}{\|\delta_s(\bar{x},\bar{t})\|_K^\beta}\, u(\bar{x},\bar{t}) \qquad 0 < s < 1,$$

per ogni u *soluzione positiva di* $\mathscr{L}u = 0$ *in* Z^+*.*

Dim. Mostriamo innanzitutto che esistono una costante positiva $\widetilde{C}$ ed $s_0 \in]0,1[$ tali che

$$u(\delta_\sigma(\bar{x},\bar{t})) \leq \widetilde{C}\, u(\bar{x},\bar{t}), \qquad \text{per ogni } \sigma \in [1-s_0, 1[. \tag{33}$$

A tal fine osserviamo che esiste $\rho \in]0,1]$ tale che $Q^-_\rho(\bar{x},\bar{t}) \subset Z^+_{\bar{x},\bar{t},U}(0,0)$. Poiché il cammino $\gamma(s) = \delta_{1-s}(\bar{x},\bar{t})$ è $\mathscr{L}$-ammissibile, esiste allora un $s_0 \in]0,1[$ tale che

$$\int_0^{s_0} |\omega(\tau)|^2 d\tau \leq h,$$

dove h è la costante che appare nella Proposizione 3.1. Da questa segue allora immediatamente la (33).

Concludiamo la prova applicando iterativamente la (33). Dato $s \in]0, 1-s_0[$, poniamo $\widetilde{Z}^+(0,0) = \delta_{(1-s_0)/s}\big(Z^+(0,0)\big)$. Si noti che la funzione

$$u_s : \widetilde{Z}^+(0,0) \to \mathbb{R}, \qquad u_s = u\big(\delta_{s/(1-s_0)}(\cdot)\big)$$

è una soluzione non-negativa di $\mathscr{L}_s u_s = 0$, dove

$$\mathscr{L}_s = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\big(\delta_{s/(1-s_0)}(z)\big)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m \frac{s}{(1-s_0)}\, a_i\big(\delta_{s/(1-s_0)}(z)\big)\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} x_i \partial_{x_j} - \partial_t.$$

Poiché anche $\mathscr{L}_s$ soddisfa le ipotesi **[H.1-3]**, la (33) vale anche per u_s. Di conseguenza,

$$u(\delta_s(\bar{x},\bar{t})) = u_s(\delta_{1-s_0}(\bar{x},\bar{t})) \leq \widetilde{C}\, u_s(\bar{x},\bar{t}) = \widetilde{C}\, u(\delta_{s/(1-s_0)}(\bar{x},\bar{t})). \tag{34}$$

Sia ora n l'unico numero naturale tale che $(1-s_0)^{n+1} \leq s < (1-s_0)^n$. Applicando n volte (34) si trova

$$u(\delta_s(\bar{x},\bar{t})) \leq \widetilde{C}^n\, u(\delta_r(\bar{x},\bar{t})), \qquad r = s/(1-s_0)^n.$$

D'altra parte, per l'omogeneità della norma $\|\cdot\|_K$ rispetto a δ_r, si ha

$$n = \frac{\ln \left\|\delta_{(1-s_0)^n}(\bar{x},\bar{t})\right\|_K - \ln \|(\bar{x},\bar{t})\|_K}{\ln(1-s_0)},$$

da cui segue

$$\widetilde{C}^n = C_1 \left\|\delta_{(1-s_0)^n}(\bar{x},\bar{t})\right\|_K^{-\beta}, \tag{35}$$

con $C_1 = \exp\big(-\frac{\ln \widetilde{C}}{\ln(1-s_0)} \ln \|(\bar{x},\bar{t})\|_K\big)$, e $\beta = -\frac{\ln \widetilde{C}}{\ln(1-s_0)} > 0$. In conclusione, poiché $s < (1-s_0)^n$ e $\beta > 0$, (35) implica $\widetilde{C}^n < C_1 \left\|\delta_s(\bar{x},\bar{t})\right\|_K^{-\beta}$, e quindi

$$u\big(\delta_s(\bar{x},\bar{t})\big) \le \frac{C_1}{\left\|\delta_s(\bar{x},\bar{t})\right\|_K^{\beta}} u(\delta_r(\bar{x},\bar{t})).$$

La conclusione segue allora utilizzando ancora (33). □

Per il prossimo risultato richiamiamo la notazione $\mathcal{B}_K(z_0, r)$ in (15). Non forniamo la prova, che consiste semplicemente nell'uso delle funzioni barriera, la cui esistenza è stata dimostrata da Manfredini in [28].

Lemma 4.3. *Sia Q_r'' un cilindro come definito in* (20) *con $r \in]0,1]$. Sia $f : Q_r'' \to \mathbb{R}$ una funzione* Lip_K *tale che $f(0,0) = 0$. Per ogni $\theta \in]0,1[$ esiste $\rho_\theta \in]0,1]$ tale che*

$$\sup_{\Omega_{f,r}\cap\mathcal{B}_K(z_0,s\rho_\theta)} u \le \theta \sup_{\Omega_{f,r}\cap\mathcal{B}_K(z_0,s)} u \tag{36}$$

per ogni u soluzione positiva di $\mathscr{L}u = 0$ in $\Omega_{f,r}$ tale che $u = 0$ su $\Delta_{f,\frac{r}{2}}$, e per ogni $z_0 \in \Delta_{f,\frac{r}{2}}$ ed $s > 0$ tali che $\mathcal{B}_K(z_0, s) \cap \partial\Omega_{f,r} \subset \Delta_{f,\frac{r}{2}}$.

Il seguente Lemma mostra che, se Σ è Lip_K, allora è possibile costruire le famiglie di coni interni ed esterni che sono utilizzati nelle dimostrazioni dei Teoremi 1.1 e 1.2. Per la dimostrazione del Lemma 4.4 e dei Teoremi 1.1 e 1.2 rimandiamo ai lavori [4] e [6].

Lemma 4.4. *Sia Q_r'' un cilindro come definito in* (20) *con $r \in]0,1]$. Sia $f : Q_r'' \to \mathbb{R}$ una funzione* Lip_K *tale che $f(0,0) = 0$. Esiste allora una costante positiva Λ_0, che dipende solo dall'operatore $\mathscr{L}$ e da M, per cui vale la seguente affermazione.*

Per ogni $\Lambda \geq \Lambda_0$, sia x_Λ il punto definito in (31), e sia $z^+ = (x_\Lambda, 1)$, $z^- = (-x_\Lambda, 1)$. Esistono $b \in]0,1[$, e due intorni U^+, U^- di x_Λ e $-x_\Lambda$ rispettivamente, tali che:

$$\text{(i)} \quad Z^+_{\delta_{br} z^+, D_{br} U^+}(x,t) \subseteq \Omega_{f,r},$$

$$\text{(ii)} \quad Z^-_{\delta_{br} z^-, D_{br} U^-}(x,t) \cap \Omega_{f,r} = \emptyset,$$

per ogni $(x,t) \in \Delta_{f,\frac{r}{2}}$. Gli insiemi U^+, U^- e la costante b dipendono solo da $\mathscr{L}, \Lambda$ e da M.

Esistono inoltre due costanti $C_2 > 1$, e $\rho_0 \in]0,1]$ che dipendono solo dall'operatore $\mathscr{L}$ e da M, tali che $C_2 \rho_0 < 1$, per cui vale la seguente affermazione.

Per ogni $\rho \in]0, \rho_0]$ ed ogni $(\xi, \tau) \in \Omega_{f, r\rho}$, esiste $(x,t) \in \Delta_{f, C_2 r\rho}$ e $\widetilde{s} \in]0, r\rho[$ tale che

$$(\xi, \tau) = (x,t) \circ \delta_{\widetilde{s}}\, z^+.$$

Riferimenti bibliografici

[1] P. Bauman, *Positive solutions of elliptic equations in nondivergence form and their adjoints*, Ark. Mat., 22 (1984), pp. 153–173.

[2] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola, S. Salsa, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), pp. 621–640.

[3] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat., 4 (1962), pp. 393–399 (1962).

[4] C. Cinti, K. Nyström, S. Polidoro, *A boundary estimate for non-negative solutions to Kolmogorov operators in non-divergence form*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 191(1), pp. 1-23, (2012).

[5] ——, *A note on Harnack inequalities and propagation sets for a class of hypoelliptic operators*, Potential Anal., 33 (2010), pp. 341–354.

[6] ——, *A Carleson-type estimate in Lipschitz type domains for non-negative solutions to Kolmogorov operators*, in corso di stampa su Annali SNS (2011).

[7] D. Danielli, N. Garofalo, A. Petrosyan, *The sub-elliptic obstacle problem: $C^{1,\alpha}$ regularity of the free boundary in Carnot groups of step two*, Adv. Math., 211 (2007), pp. 485–516.

[8] D. Danielli, N. Garofalo, S. Salsa, *Variational inequalities with lack of ellipticity. I. Optimal interior regularity and non-degeneracy of the free boundary*, Indiana Univ. Math. J., 52 (2003), pp. 361–398.

[9] M. Di Francesco, A. Pascucci, S. Polidoro, *The obstacle problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 464 (2008), pp. 155–176.

[10] M. Di Francesco, S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form*, Advances in Differential Equations, 11 (2006), pp. 1261–1320.

[11] E. Fabes, N. Garofalo, S. Marín-Malave, S. Salsa, *Fatou theorems for some nonlinear elliptic equations*, Rev. Mat. Iberoamericana, 4 (1988), pp. 227–251.

[12] E. B. Fabes, N. Garofalo, S. Salsa, *A backward Harnack inequality and Fatou theorem for nonnegative solutions of parabolic equations*, Illinois J. Math., 30 (1986), pp. 536–565.

[13] E. B. Fabes, C. E. Kenig, *Examples of singular parabolic measures and singular transition probability densities*, Duke Math. J., 48 (1981), pp. 845–856.

[14] E. B. Fabes, M. V. Safonov, *Behavior near the boundary of positive solutions of second order parabolic equations*, in Proceedings of the conference dedicated to Professor Miguel de Guzmán (El Escorial, 1996), vol. 3, 1997, pp. 871–882.

[15] E. B. Fabes, M. V. Safonov, Y. Yuan, *Behavior near the boundary of positive solutions of second order parabolic equations. II*, Trans. Amer. Math. Soc., 351 (1999), pp. 4947–4961.

[16] E. B. Fabes, D. W. Stroock, *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash*, Arch. Rational Mech. Anal., 96 (1986), pp. 327–338.

[17] F. Ferrari, B. Franchi, *Geometry of the boundary and doubling property of the harmonic measure for Grushin type operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 58 (2000), pp. 281–299 (2002). Partial differential operators (Torino, 2000).

[18] ——, *A local doubling formula for the harmonic measure associated with subelliptic operators and applications*, Comm. Partial Differential Equations, 28 (2003), pp. 1–60.

[19] M. Frentz, K. Nyström, A. Pascucci, S. Polidoro, *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options*, Math. Ann., (2010), pp. 805–838.

[20] N. Garofalo, *Second order parabolic equations in nonvariational forms: boundary Harnack principle and comparison theorems for nonnegative solutions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 138 (1984), pp. 267–296.

[21] S. Hofmann, J. L. Lewis, *The Dirichlet problem for parabolic operators with singular drift terms*, Mem. Amer. Math. Soc., 151 (2001), pp. viii+113.

[22] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[23] D. S. Jerison, C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math., 46 (1982), pp. 80–147.

[24] C. E. Kenig, J. Pipher, *The Dirichlet problem for elliptic equations with drift terms*, Publ. Mat., 45 (2001), pp. 199–217.

[25] N. V. Krylov, M. V. Safonov, *A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 44 (1980), pp. 161–175, 239.

[26] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63. Partial differential equations, II (Turin, 1993).

[27] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL, second ed., 1986.

[28] M. Manfredini, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, Adv. Differential Equations, 2 (1997), pp. 831–866.

[29] K. Nyström, *The Dirichlet problem for second order parabolic operators*, Indiana Univ. Math. J., 46 (1997), pp. 183–245.

[30] K. Nyström, A. Pascucci, S. Polidoro, *Regularity near the initial state in the obstacle problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic operators*, to appear in J. Differential Equations, (2010).

[31] M. V. Safonov, Y. Yuan, *Doubling properties for second order parabolic equations*, Ann. of Math. (2), 150 (1999), pp. 313–327.

[32] S. Salsa, *Some properties of nonnegative solutions of parabolic differential operators*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 128 (1981), pp. 193–206.