Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2010 -11

Stefania Gatti

Decadimento uniforme per equazioni integro-differenziali lineari di Volterra

19 maggio 2011

Abstract

This talk is devoted to some recent results concerning the exponential and the polynomial decays of the energy associated with a linear Volterra integro-differential equation of hyperbolic type in a Hilbert space, which is an abstract version of the equation describing the motion of a linearly viscoelastic solid occupying a (bounded) volume at rest. We provide sufficient conditions for the decay to hold, without invoking differential inequalities involving the convolution kernel. A similar analysis is carried on in the whole N-dimensional real space, although both the polynomial and the exponential decay of the memory kernel lead to a polynomial decay of the energy, with a rate influenced by the space dimension N. These results are contained in two joint papers with Monica Conti and Vittorino Pata (Politecnico di Milano).

1. Introduzione

Discuteremo il decadimento uniforme dell'energia di una equazione lineare omogenea integro-differenziale di Volterra di tipo iperbolico in uno spazio di Hilbert. Piú precisamente, dato uno spazio di Hilbert reale $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ e un operatore lineare A strettamente positivo e autoaggiunto su H di dominio $\mathcal{D}(A)$, posto $V = \mathcal{D}(A^{1/2})$, considereremo il sistema nell'incognita $u(t)$, $t \in [0, \infty)$,

$$
\begin{cases} \partial_{tt} u(t) + \alpha A u(t) + \beta \partial_t u(t) - \displaystyle\int_0^t \mu(s) A u(t-s) ds = 0, & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in V, \quad \partial_t u(0) = u_1 \in H, \end{cases} \tag{1}
$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$. In tutta questa nota, assumeremo che il nucleo di memoria

$$
\mu : \mathbb{R}^+ := (0, \infty) \to [0, \infty) \quad \text{sia decrescente, sommabile con} \quad \kappa = \int_0^\infty \mu(s) ds < \alpha. \tag{2}
$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio limitato e regolare, un esempio del precedente sistema è

$$
\begin{cases} \partial_{tt} u(t) - \alpha \Delta u(t) + \beta \partial_t u(t) + \displaystyle\int_0^t \mu(s) \Delta u(t-s) ds = 0, & t > 0, \\ u|_{\partial \Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3}
$$

corrispondente alle equazioni del moto di un materiale linearmente viscoelastico isotropo omogeneo che, a riposo, occupi il volume limitato Ω. In questo caso, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta_D$ è la realizzazione del Laplaciano in H con condizioni di Dirichlet omogenee mentre la funzione u rappresenta lo spostamento rispetto alla configurazione di equilibrio. La costante $\beta \geq 0$ è il coefficiente di attrito dinamico, mentre $\alpha > 0$ insieme a $\kappa = \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) ds < \alpha$ significa che il materiale è un solido viscoelastico e non un fluido.

Trattando per semplicitá (3), osserviamo che il sistema risulta ben posto nello spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, nel senso che, per ogni dato iniziale in tale spazio, esiste un'unica soluzione debole.

Inoltre, le precedenti ipotesi sul nucleo sono sufficienti a garantire il decrescere lungo le traiettorie dell'energia del sistema

$$
E(t) = \left(\alpha - \int_0^t \mu(s) ds \right) \| u(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| \partial_t u(t) \|^2 + \int_0^t \mu(s) \| u(t) - u(t-s) \|^2_{H_0^1(\Omega)} ds
$$

(qui ed in seguito, $\|\cdot\|$ è la norma in $L^2(\Omega)$ o $[L^2(\Omega)]^3$, a seconda del contesto). Tale perdita di energia si deve alla dissipazione provvista dal termine di memoria e dal termine di attrito (quest'ultimo solo se $\beta > 0$): di conseguenza, la dissipazione risulta molto debole in assenza di frizione ($\beta = 0$).

I nostri obiettivi sono condizioni sufficienti sul nucleo di memoria μ per il decadimento uniforme dell'energia $E(t)$ reso dall'esistenza di una funzione decrescente infinitesima all'infinito $\Lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ e di una funzione crescente $\mathcal{Q} : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tali che $E(t) \leq \mathcal{Q}(E(0))\Lambda(t)$, per ogni $t \geq 0$: diremo quindi che $E(t)$ ha decadimento uniforme di tasso $\Lambda(t)$. Si deve notare che, poiché l'equazione con ritardo finito non genera un semigruppo lineare, l'energia puó presentare decadimenti uniformi non esponenziali. I due casi cui siamo particolarmente interessati sono:

- $\Lambda(t) = e^{-\varepsilon t}$, per qualche $\varepsilon > 0$ [*stabilitá esponenziale*];
- $\Lambda(t) = 1/(1+t)^p$, per qualche $p > 0$ [*stabilitá polinomiale di tasso* p].

Piú esattamente, vogliamo individuare condizioni sufficienti per la stabilitá esponenziale/polinomiale che escludano disequazioni differenziali per μ (si vedano le sottostanti (4) e (6)) perché queste non sarebbero soddisfatte, per esempio, da nuclei strettamente decrescenti con un flesso orizzontale o non strettamente decrescenti e non nulli. Inoltre si vuole consentire a μ di avere deboli (ovvero integrabili) singolaritá in $s = 0$, perché nelle applicazioni si presentano nuclei con queste caratteristiche. Chiaramente tutti i risultati ottenuti valgono anche per il problema astratto (1). Nell'ultima parte della nota, si accenna ad analoghi risultati nel caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ in cui si ottiene comunque il decadimento polinomiale dell'energia, anche se il nucleo è dominato da un esponenziale descrescente.

2. Letteratura

La letteratura sul decadimento uniforme dell'energia di problemi simili a (1) è assai vasta e affronta, inizialmente, il modello con ritardo infinito. In questo caso, negli anni Settanta, Dafermos [7] riesce a mostrare la buona posizione e il decadimento dell'energia, sotto l'ipotesi che il nucleo, oltre a soddisfare (2), sia

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{tale che esista} \quad \delta > 0 \quad \text{per cui} \quad \mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0. \tag{4}$$

Un grande merito di Dafermos è l'introduzione di uno spazio esteso, detto delle storie, ottenuto aggiungendo una variabile che rappresenti la storia passata, soddisfacente ad una opportuna equazione di evoluzione. Tuttavia, la stabilitá esponenziale assicurata da (2) e (4) viene provata solo negli anni Novanta da Fabrizio e Lazzari [10], avvalendosi della Trasformata di Laplace. Successivamente, Giorgi, Muñoz Rivera e Pata [13], inquadrando il sistema nello spazio delle storie dove viene generato un semigruppo lineare di contrazioni, ottengono lo stesso risultato con stime dirette dell'energia: ció gli permette uno studio globale delle dinamiche a lungo termine anche di sistemi nonlineari legati a (1). È sembrato, quindi, che (4) fosse ineludibile, sebbene ottime motivazioni fisiche inducessero a superarla. Nondimeno, dal punto di vista tecnico, rinunciare a questa ipotesi risulta complicato, tanto è vero che Pata vi riesce solo nel 2010, estendendo contestualmente la classe dei nuclei ammissibili. Dopo un primo lavoro [21], in cui la misura normalizzata dell'insieme su cui il nucleo è costante e positivo non doveva eccedere 1/2, in [22] Pata riesce a dimostrare che, anche se tutta la dissipazione del sistema si deve alla presenza della memoria, le sole discontinuitá a salto del nucleo μ sono sufficienti per il decadimento esponenziale dell'energia. Piú precisamente,

Teorema 2.1. *Se il nucleo μ, soddisfacente* (2)*, mappa insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla e, qualora abbia punti di discontinuitá, questi formino una successione crescente; se, inoltre, vale la condizione di dissipazione*

$$\exists C \geq 1, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tali che} \quad \mu(t+s) \leq Ce^{-\delta t}\mu(s), \quad \forall t \geq 0, \tag{5}$$

per quasi ogni $s > 0$, allora l'energia del sistema decade esponenzialmente, a patto che, se $\beta = 0$, l'insieme $\{s \in \mathbb{R}^+ : \quad \mu'(s) < 0\}$ abbia misura di Lebesgue positiva.

Poiché il principale ingrediente della dimostrazione è la Teoria dei Semigruppi Lineari e l'equazione di Volterra non ne genera uno, tale strategia non si applica a (1).

Venendo infatti al problema con ritardo finito, la letteratura sulla stabilitá polinomiale/esponenziale dell'equazione di Volterra è caratterizzata dall'ipotesi che il nucleo di memoria soddisfi disequazioni differenziali. Ricordiamo [15], dove Muñoz Rivera mostra che (2) e (4) sono condizioni sufficienti per il decadimento esponenziale e, in $\mathbb{R}^N$, per un decadimento polinomiale; lo stesso autore, con diversi collaboratori [1, 16, 18, 19], perviene a mostrare che, se il nucleo, oltre a (2), è limitato e verifica

$$\exists q > 2, \quad \exists \delta, C > 0 \quad \text{tali che} \quad \mu'(s) + \delta[\mu(s)]^{(q+1)/q} \leq 0, \tag{6}$$

allora (3) è polinomialmente stabile di tasso q; nell'intero spazio $\mathbb{R}^N$, la velocitá di decadimento polinomiale dipende dalla dimensione. Abbiamo peró giá osservato che ipotesi come (4) o (6) non sono soddisfacenti, sia per ragioni modellistiche che analitiche. Purtroppo risulta complesso rinunciarvi anche nello studio di (3) perché tali disequazioni differenziali, trasferendosi dal nucleo al funzionale dell'energia, consentono di mostrare la stabilitá esponenziale o polinomiale.

Tra i primi lavori sul decadimento uniforme dell'energia di (3) in cui si evitano disequazioni differenziali sul nucleo, ricordiamo [2] (sulla stessa linea, citiamo anche [17]), dove, grazie alla trasformata di Laplace (quella del nucleo è $\hat{\mu}$), si mostra il seguente

Teorema 2.2. *Se il nucleo $\mu \in C^1[0,\infty) \cap W^{1,1}(0,\infty)$, oltre a verificare $\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)ds < \alpha$, soddisfa $\mu(0) > 0$, $\frac{1}{\lambda}\mathrm{Im}\hat{\mu}(i\lambda) < 0$, per ogni $\lambda \neq 0$, ed esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\int_0^\infty [\mu(s) - \mu'(s)]e^{\delta s} ds < \infty,$$

allora, per $\beta \geq 0$, ogni soluzione forte $u \in C^0([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega))$, originata da un dato iniziale $(u_0, u_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$, verifica

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{Q}e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0,$$

per $\mathcal{Q} \geq 0$ dependente da u_0 e u_1 e $\varepsilon > 0$.

Se, da un lato, le ipotesi di [2] ammettono nuclei non positivi né decrescenti ma, per esempio, oscillanti, come $\mu(t) = Ce^{-\delta t}(\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$, $C, \delta, \omega > 0$, dall'altro non garantiscono la buona posizione e stime della soluzione nella stessa norma del dato iniziale. Successivamente, Fabrizio e Polidoro [12] forniscono condizioni necessarie per il decadimento esponenziale e polinomiale dell'energia di (3), a patto che, oltre a valere (2), sia $\mu \in L^2(\mathbb{R}^+)$ (ipotesi tecnica legata all'utilizzo della Trasformata di Laplace).

Condizione necessaria per la stabilitá esponenziale, anche se $\beta > 0$, è che μ soddisfi la cosiddetta *proprietá del decadimento esponenziale*

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tale che} \quad \int_0^\infty e^{\gamma s}\mu(s)ds < \infty, \tag{7}$$

giá individuata da Murakami [20] nel caso scalare. In effetti, la monotonia decrescente del nucleo rende (7) equivalente alla richiesta che μ sia dominato da un esponenziale decrescente sulla semiretta (s^*, ∞) per ogni $s_* > 0$ (anzi, se il nucleo è limitato nell'origine, $s^* = 0$). Questa considerazione rende la condizione necessaria abbastanza sorprendente perché il contributo della memoria è dissipativo e, se $\beta > 0$ e $\mu \equiv 0$, il sistema coincide con l'equazione dei telegrafisti che è esponenzialmente stabile.

Nello stesso lavoro [12], gli autori dimostrano che, se $\mu \in L^2(\mathbb{R}^+)$ verifica (2), condizione necessaria per il decadimento polinomiale dell'energia è la *proprietá del decadimento polinomiale*

$$\exists q > 1 \quad \text{tale che} \quad \int_0^\infty (1+s)^q \mu(s)ds < \infty. \tag{8}$$

Piú esattamente, viene dimostrato che condizione necessaria per la stabilitá di tasso $p > 2$ è che

$$q_0 := \sup\left\{q \geq 0 : \int_0^\infty (1+s)^q \mu(s)ds < \infty\right\} \geq \frac{p-2}{2}. \tag{9}$$

Confrontando quest'ultima condizione necessaria per il decadimento polinomiale di tasso $p > 2$ con quella sufficiente (6), si scopre che, fissato $\mu(s) = 1/(1+s)^r$, allora: se è noto che $E(t)$ ha un decadimento polinomiale di tasso $p > 2$, la condizione necessaria (9) implica $r \geq p/2$; mentre, se $r > 2$, la condizione sufficiente (6) fornisce un tasso di decadimento r per $E(t)$.

Inoltre, è naturale chiedersi se le condizioni necessarie non siano anche sufficienti per la stabilitá esponenziale/polinomiale di (1). Una opportuna scelta del nucleo mostra che ció è falso, se $\beta = 0$, come attesta la seguente

Proposizione 2.1. *Supponiamo che il nucleo di memoria sia una funzione con un solo gradino $\mu(s) = b\chi_{[0,\ell)}(s)$, dove $b > 0$ e $\ell > 0$ sono tali che $b\ell < \alpha$. Se l'operatore A possiede* *almeno un autovalore $\lambda > 0$, e w è il corrispondente autovettore, allora, se $\beta = 0$, esiste $\ell > 0$ tale che l'energia $E(t)$ del sistema non abbia alcun decadimento uniforme.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $E(t)$ abbia il decadimento uniforme $\Lambda(t)$. Fissati i dati iniziali $u_0 = 0$ e $u_1 = w$, cerchiamo una soluzione di (1) della forma $u(t) = r(t)w$. La funzione r deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) + \alpha\lambda r(t) - b\lambda \displaystyle\int_0^t \chi_{[0,\ell)}(s) r(t-s)ds = 0, \qquad t > 0, \\ r(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = 1 \end{cases} \tag{10}$$

ed essere infinitesima all'infinito a causa del decadimento uniforme di $E(t)$.

Consideriamo ora il problema non omogeneo

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) + \alpha\lambda\varphi(t) - b\lambda \displaystyle\int_0^t \chi_{[0,\ell)}(s)\varphi(t-s)ds = f(t), \qquad t > 0, \\ \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = a \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{11}$$

dove f è una funzione limitata con supporto in $[0, \ell]$. La formula di variazione dei parametri consente di rappresentare la soluzione di (11) come

$$\varphi(t) = ar(t) + \int_0^t r(t-s)f(s)ds,$$

dove r risolve (10) e, in particolare, è infinitesima. Pertanto, da

$$|\varphi(t)| \leq |a||r(t)| + \ell \sup_{s\in[0,\ell]} |f(s)| \sup_{s\in[0,\ell]} |r(t-s)|, \qquad t \geq \ell$$

segue $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. D'altro canto, scegliendo

$$\ell = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\lambda}}, \quad a = \sqrt{\alpha\lambda}, \quad f(t) = \begin{cases} b\sqrt{\dfrac{\lambda}{\alpha}}(\cos\sqrt{\alpha\lambda}\,t - 1), & \text{se } t \leq \ell, \\ 0, & \text{se } t > \ell, \end{cases}$$

l'unica soluzione di (11) è $\varphi(t) = \sin\sqrt{\alpha\lambda}\,t$, funzione non infinitesima all'infinito: si perviene quindi ad un assurdo. $\square$

3. I nostri risultati in un insieme limitato

Come anticipato, nei nostri risultati non imponiamo al nucleo di memoria disequazioni differenziali bensí altre condizioni che, tra l'altro, consentono a μ di non essere né strettamente decrescente né continuo. Piú precisamente, oltre a (2), supponiamo che:
($\star$) il nucleo di memoria puó ammettere una successione strettamente crescente di punti di discontinuitá a salto $\{s_n\}$, con $s_0 = 0$. Tale successione puó essere finita (e possibilmente ridursi al solo s_0) oppure convergente a $s_\infty \in [0, \infty]$. In particolare, per ogni $n > 0$, il nucleo μ ha una discontinuitá a salto in $s = s_n$, ed è assolutamente continuo su $I_n = (s_{n-1}, s_n)$ e su $I_\infty = (s_\infty, \infty)$, a meno che questo non sia definito. Se $s_\infty < \infty$, allora in tal punto μ non ha necessariamente un salto.

Tali ipotesi garantiscono l'esistenza quasi ovunque di $\mu' \leq 0$ e consentono al nucleo di essere singolare (purché con singolaritá integrabile) in $s = 0$.

Come in [21], dopo avere introdotto la misura (Borelliana) di probabilitá su $\mathbb{R}^+$

$$\hat{\mu}(\mathcal{A}) = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{A}} \mu(s) ds, \qquad \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{misurabile},$$

la *misura di piattezza* di μ è $\mathcal{R}_\mu := \hat{\mu}(\mathcal{P})$, dove $\mathcal{P}$ è l'insieme su cui il nucleo è costante e positivo, ovvero,

$$\mathcal{P} = \{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) > 0 \text{ e } \mu'(s) = 0\}.$$

Le disequazioni differenziali vengono ora sostituite dalla seguente condizione di dissipazione su μ:

$$\exists p \in (0, \infty], \exists C \geq 0 \quad \text{tali che} \quad \int_t^\infty \mu(s) ds \leq C \Upsilon_p(t), \tag{12}$$

dove

$$\Upsilon_p(t) := \begin{cases} e^{-\delta t} \ \ (\delta > 0) & \text{se } p = \infty, \\ \dfrac{1}{(1+t)^p} & \text{se } p < \infty. \end{cases}$$

Il seguente Teorema è il principale risultato di [4]

Teorema 3.1. *Se il nucleo μ soddisfa* (2), ($\star$) *e* (12) *e se, qualora sia $\beta = 0$, si richieda $\mathcal{R}_\mu < 1/2$, allora valgono i seguenti risultati:*

(1) *se $p = \infty$, il problema* (3) *è esponenzialmente stabile.*

(2) *se $p<\infty$, il problema* (3) *è polinomialmente stabile di tasso p.*

Premettiamo che, nei seguenti cenni di dimostrazione:

(a) per semplicitá, supporremo il nucleo limitato in $s=0$;

(b) discuteremo solo il caso debolmente dissipativo $\beta=0$;

(c) per alleggerire le notazioni, assumeremo $\alpha-\kappa=1$.

Dimostrazione. **Il caso $\mathbf{p}=\infty$**

I passo: Ambientazione nello spazio delle storie

Malgrado l'equazione di Volterra non generi un semigruppo lineare neppure nello spazio delle storie, grazie ad un argomento di approssimazione, possiamo comunque tradurre il problema in questo ambito, dove si trasforma in una equazione differenziale ordinaria in uno spazio di Hilbert, con una componente dedicata alla storia passata. Dopo avere esteso $u(t)=0$ per $t<0$, si definisce, per $t\geq 0$ la variabile *storia passata*

$$\eta^t(s)=u(t)-u(t-s), \qquad s\in\mathbb{R}^+,$$

che, in particolare, verifica la condizione iniziale $\eta^0(s)=u_0$. Introducendo η e ricordando (c), l'equazione in (3) diventa

$$\partial_{tt}u(t)-\Delta_D u(t)-\int_0^\infty \mu(s)\Delta_D\eta^t(s)ds=0, \qquad t>0,$$

accoppiata ad un'equazione di evoluzione per η. Questa, infatti, è l'unica soluzione mild del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\eta^t=T\eta^t+\partial_t u(t), \qquad t>0,\\ \eta^0(s)=u_0, \end{cases}$$

in $\mathcal{M}:=L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$, spazio L^2 con peso μ, su cui T è il generatore infinitesimale del semigruppo C^0 delle traslazioni a destra, cioé l'operatore lineare $T\eta:=-\partial_s\eta$ di dominio $\mathcal{D}(T)=\{\eta\in\mathcal{M}:\partial_s\eta\in\mathcal{M},\ \eta(0)=0\}$, con la derivata ∂_s intesa nel senso delle distribuzioni.

Pertanto, definendo lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}:=H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\mathcal{M} \quad \text{normato da} \quad \|(u,v,\eta)\|^2_{\mathcal{H}}:=\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|v\|^2+\|\eta\|^2_{\mathcal{M}},$$

una funzione u è soluzione debole di (3) se e solo se la terna $z = (u, v, \eta)$ è soluzione mild di

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = v(t), \qquad t > 0, \\ \partial_t v(t) = \Delta_D u(t) + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\Delta_D \eta^t(s)ds, \qquad t > 0, \\ \partial_t \eta^t = T\eta^t + v(t), \qquad t > 0, \\ z(0) = (u_0, u_1, u_0), \end{cases} \tag{13}$$

ovvero, dell'equazione differenziale ordinaria in $\mathcal{H}$

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathbb{L}z(t), \qquad t > 0, \tag{14}$$

con dato iniziale $z(0) = (u_0, u_1, u_0)$. L'espressione di $\mathbb{L}$ si ricava facilmente dalle equazioni, mentre il suo dominio sará

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \{(u, v, \eta) \in \mathcal{H} : u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega),\ \eta \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Poiché (14) genera un semigruppo lineare di contrazioni $(S(t), \mathcal{H})$, in particolare abbiamo la buona posizione del nostro problema e possiamo rappresentarne l'energia in $\mathcal{H}$ come $E(t) = \|S(t)(u_0, u_1, u_0)\|^2_{\mathcal{H}}$.

Inoltre, per dati iniziali $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$, l'energia $\mathcal{E}(t) = \|S(t)z_0\|^2_{\mathcal{H}}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) - \int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds + \mathbb{J}[\eta^t] = 0, \tag{15}$$

dove $\mathbb{J}[\eta^t] := \sum_n [\mu(s_n^-) - \mu(s_n^+)]\|\eta^t(s_n)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0$ è il contributo dovuto ai salti di μ.

Poiché $\eta^0(0) = u_0 \notin \mathcal{D}(T)$ (tranne nel caso $u_0 = 0$), per ogni $\rho > 0$ si costruisce $\eta^0_\rho \in \mathcal{D}(T)$ tale che $\lim_{\rho\to 0} \|\eta^0_\rho - u_0\|_{\mathcal{M}} = 0$. Questo accorgimento, insieme ad argomenti di densitá e alla continuitá del semigruppo, ci consente di perseguire le stime dell'energia per $\mathcal{E}(t)$ con dati in un sottospazio di $\mathcal{D}(\mathbb{L})$, sapendo che queste si potranno estendere a $E(t)$.

II passo: Sfruttiamo la debole dissipazione

Risulta difficile mostrare il decadimento uniforme dell'energia nel caso (b) perché il nucleo di memoria fornisce dissipazione solo su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{P}$, sebbene ci soccorra la limitazione sulla misura di piattezza (il seguente argomento vale a meno di insiemi di misura nulla): infatti, da $\hat{\mu}(\mathcal{P}) < 1/2$ si ottiene una decomposizione di $\mathbb{R}^+$ in due sottoinsiemi su cui si recuperano disequazioni differenziali su μ. A questo scopo conviene interpretare $\mathcal{P}$ come l'intersezione $\mathcal{P} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k$, dove $\mathcal{P}_{k+1} \subset \mathcal{P}_k$ in quanto

$$\mathcal{P}_k := \{s \in \mathbb{R}^+ : k\mu'(s) + \mu(s) > 0\}.$$

Possiamo, dunque, fissare $n > 0$ tale che $\hat{\mu}(\mathcal{P}_n) < 1/2$ e osservare che sul complementare di $\mathcal{P}_n$ la dissipazione è quantificabile perché $\mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{P}_n = \{s \in \mathbb{R}^+ : n\mu'(s) + \mu(s) \leq 0\}$. La conseguente decomposizione $\mathbb{R}^+ = \mathcal{P}_n \cup (\mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{P}_n)$ si riflette sulla norma della variabile di memoria, che avrá quindi una parte dissipativa sul complementare di $\mathcal{P}_n$ ed una no. Infatti, $\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}} = \Gamma^+_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] + \Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t]$, dove

$$\Gamma^+_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] := \int_{\mathcal{P}_n} \mu(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \qquad \text{e} \qquad \Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] := \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}_n} \mu(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds.$$

In questo modo, siamo in grado di sfruttare la dissipazione fornita dal termine di memoria perché da

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds &= -\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}_n} \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds - \int_{\mathcal{P}_n} \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \\ &\geq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}_n} \mu(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds - \int_{\mathcal{P}_n} \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \\ &\geq \frac{1}{n}\Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] - \int_{\mathcal{P}_n} \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \end{aligned}$$

sostituita in (15), otteniamo la disequazione

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \frac{1}{n}\Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] - \int_{\mathcal{P}_n} \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds + \mathbb{J}[\eta^t] \leq 0. \tag{16}$$

III passo: Costruzione di un funzionale Φ che permetta di ricostruire il funzionale dell'energia

Per brevitá, consideriamo direttamente i funzionali su $S(t)z_0 = (u(t), \partial_t u(t), \eta^t) \in \mathcal{H}$ (la loro definizione rigorosa si deduce immediatamente)

$$\Phi_1(t) := -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \mu(s)\langle \partial_t u(t), \eta^t(s)\rangle ds$$

$$\Phi_2(t) := \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle$$

$$\Phi_3(t) := \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mu(\sigma)\chi_{\mathcal{P}_n}(\sigma)d\sigma\right)\|\eta^t(s) - u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \geq 0.$$

Quindi, indichiamo con $\nu \in (0,1)$ un parametro da fissare in seguito opportunamente piccolo, e con ε_ν e c_ν due costanti positive: la prima decrescente insieme a ν e la seconda che, al contrario, aumenta al decrescere di ν. Deriviamo quindi i funzionali, ricordando (c) e mettendo al primo posto, a destra, le parti che consentono di ricostruire l'energia:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_1}{dt}(t) &= -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \mu(s)\langle \partial_{tt} u(t), \eta^t(s)\rangle ds - \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \mu(s)\langle \partial_t u(t), \partial_t \eta^t(s)\rangle ds \\ &\leq -(1-\nu)\|\partial_t u(t)\|^2 + \varepsilon_\nu \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (\varepsilon_\nu + \hat{\mu}(\mathcal{P}_n))\Gamma^+_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] + c_\nu \Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] \\ &\quad + \frac{1}{\kappa}\int_{\mathcal{P}_n} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_{H_0^1(\Omega)} ds - c_\nu\bigg(\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds - \mathbb{J}[\eta^t]\bigg).\end{aligned}$$

Si noti che l'ultimo termine è positivo con un coefficiente che cresce al diminuire di ν e nessun controllo dall'alto, quindi dovrá essere poi compensato *rafforzando* la controparte che aiuta la dissipazione in (16) (ció spiega perché, nella definizione del successivo funzionale $\mathcal{L}$ nel IV passo, l'energia $\mathcal{E}$ sia moltiplicata per una costante M opportunamente grande). Ripetiamo lo stesso computo con $\Phi_2(t)$ e $\Phi_3(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_2}{dt}(t) &= \langle \partial_{tt} u(t), u(t)\rangle + \|\partial_t u(t)\|^2 \\ &\leq -\kappa\Big(\frac{1}{\kappa} - \nu\Big)\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\partial_t u(t)\|^2 + \frac{1}{4\nu}\Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] - \int_{\mathcal{P}_n} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_{H_0^1(\Omega)} ds\end{aligned}$$

$$\frac{d\Phi_3}{dt}(t) = -\Gamma^+_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] + 2\int_{\mathcal{P}_n} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_{H_0^1(\Omega)} ds.$$

L'ultimo contributo nelle due formule precedenti si puó controllare perché, grazie a $\hat{\mu}(\mathcal{P}_n) < 1/2$, esiste $a > 0$ tale che $a + \hat{\mu}(\mathcal{P}_n) < \frac{1}{2}$, quindi, dalle disuguaglianze di Hölder e Young, segue

$$\int_{\mathcal{P}_n} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_{H_0^1(\Omega)} ds \leq \frac{\kappa(1-2a)}{2}\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\Gamma^+_{\mathcal{P}_n}[\eta^t].$$

Raccogliendo le precedenti stime, posto

$$\Phi(t) := \Phi_1(t) + a\Phi_2(t) + \frac{\omega + a}{2}\Phi_3(t), \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{1}{\kappa},$$

avremo che, fissato ν è sufficientemente piccolo, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) + 2\varepsilon_0 \mathcal{E}(t) \le c\Gamma^-_{\mathcal{P}_n}[\eta^t] - c\Big(\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}ds - \mathbb{J}[\eta^t]\Big), \tag{17}$$

per qualche costante $c > 0$. Poiché l'ultimo termine nonnegativo si oppone alla dissipazione, $\dfrac{d\Phi}{dt}(t)$ consente di ricostruire l'energia ma produce anche termini tutt'altro che dissipativi, oltre al fatto che Φ non è equivalente ad $\mathcal{E}$. Pertanto procediamo con il

IV passo: Costruzione di un funzionale che, oltre a permettere di sfruttare la dissipazione, sia confrontabile con il funzionale dell'energia e consenta di eliminare i termini non dissipativi

Definiamo il funzionale $\mathcal{L}(t) := M\mathcal{E}(t) + \Phi(t)$, dove $M > 0$. Grazie a (16)-(17), a patto che $M = M(n) > 0$ tale da bilanciare l'ultimo termine in (17), $\mathcal{L}$ soddisfa

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) + 2\varepsilon_0\mathcal{E}(t) \le 0. \tag{18}$$

Si dimostra che esistono $K \ge 1$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\|z_0\|_{\mathcal{H}}) > 0$ tali che

$$\frac{1}{K}\mathcal{E}(t) \le \mathcal{L}(t) \le K\big[\mathcal{E}(t) + \Psi_\infty(t)\big] + \mathcal{Q}e^{-\delta t},$$

dove il termine contenente

$$\Psi_\infty(t) := \int_0^t e^{-\delta(t-s)}\|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}ds$$

e il successivo nell'ultima disequazione sono dovuti a Φ_3. Sfruttando la definizione di $\mathcal{E}$, da (18) si ottiene

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) + \varepsilon\mathcal{E}(t) \le -\varepsilon_0\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

che, insieme a $\mathcal{E}(t) \ge \dfrac{1}{K}(\mathcal{L}(t) - \mathcal{Q}e^{-\delta t}) - \Psi_\infty(t)$, conduce a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) + \varepsilon\mathcal{L}(t) \le -\varepsilon_0\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \varepsilon K\Psi_\infty(t) + \mathcal{Q}e^{-\delta t},$$

dove sono stati opportunamente modificati sia ε che $\mathcal{Q}$. Fissato $\varepsilon < \delta$, il Lemma di Gronwall, insieme al confronto tra funzionali, fornisce

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{Q}e^{-\varepsilon t} - \varepsilon_0 e^{-\varepsilon t} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \|u(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau + \varepsilon K e^{-\varepsilon t} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \Psi_\infty(\tau) d\tau.$$

L'ultimo termine (positivo) non è ancora compensato tuttavia, scambiando l'ordine d'integrazione, si puó dominare come segue

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\varepsilon\tau} \Psi_\infty(\tau) d\tau &= \int_0^t e^{-(\delta-\varepsilon)\tau} \Big(\int_0^\tau e^{\delta s} \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \Big) d\tau \\
&= \int_0^t e^{\delta\tau} \|u(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \Big(\int_\tau^t e^{-(\delta-\varepsilon)s} ds \Big) d\tau \\
&\leq \frac{1}{\delta - \varepsilon} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \|u(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau.
\end{aligned}$$

Pertanto, se ε è sufficientemente piccolo, si ha la stima cercata

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{Q}e^{-\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t} \Big(\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon K}{\delta - \varepsilon} \Big) \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \|u(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau \leq \mathcal{Q}e^{-\varepsilon t} = \mathcal{Q}(\|z_0\|)\Lambda_\infty(t).$$

□

Dimostrazione. **Il caso $\mathbf{p} < \infty$**

In tutta la dimostrazione $q := (p+1)/p$. Poiché, in questo caso, il solo funzionale $\mathcal{L}$ definito precedentemente non fornisce disequazioni utili al nostro scopo, occorrono nuovi contributi. Innanzitutto introduciamo

$$0 \leq \Psi_p(t) := \int_0^t \Upsilon_p(t-s) \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds, \quad \text{dove} \quad \Upsilon_p(t) := \frac{1}{(1+t)^p}$$

è scelto in quanto soluzione di $\dfrac{d\Upsilon_p}{dt} + p[\Upsilon_p]^q = 0$. Integrando (18) su $(0, \infty)$, si ottiene la disequazione

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \leq \mathcal{Q},$$

che, a patto di cambiare l'ordine di integrazione in Ψ_p, fornisce il controllo

$$\begin{aligned}
\Psi_p(t) &\leq \Big(\int_0^t [\Upsilon_p(t-s)]^q \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \Big)^{1/q} \Big(\int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \Big)^{(q-1)/q} \\
&\leq \mathcal{Q} \Big(\int_0^t [\Upsilon_p(t-s)]^q \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \Big)^{1/q},
\end{aligned}$$

ovvero,

$$[\Psi_p(t)]^q \leq \mathcal{Q}\int_0^t [\Upsilon_p(t-s)]^q \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds. \tag{19}$$

Tenendo conto di (19) e dell'equazione soddisfatta da Υ_p, calcoli diretti conducono a

$$\frac{d\Psi_p}{dt} + \frac{1}{\mathcal{Q}}[\Psi_p]^q \leq K\mathcal{E}. \tag{20}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_p(t) &= \int_0^t \Upsilon_p'(t-s)\|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds + \Upsilon_p(0)\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq -p\int_0^t [\Upsilon_p(t-s)]^q \|u(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds + K\mathcal{E}(t) \\
&\leq -\frac{1}{\mathcal{Q}}[\Psi_p(t)]^q + K\mathcal{E}(t).
\end{aligned}$$

Quindi, per $\varepsilon > 0$, definiamo l'ulteriore funzionale $\mathcal{L}_0(t) := \mathcal{L}(t) + \varepsilon\Psi_p(t)$ che, come si vede sommando a (18) la disequazione (20) moltiplicata per ε, soddisfa

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt}(t) + \frac{1}{\mathcal{Q}}\big[\mathcal{E}(t) + [\Psi_p(t)]^q + [\Upsilon_p(t)]^q\big] \leq [\Upsilon_p(t)]^q, \tag{21}$$

dove $[\Upsilon_p(t)]^q$ è stato aggiunto ad entrambi i membri. Ció induce a confrontare $\mathcal{L}_0(t)$ e $\mathcal{E}(t) + [\Psi_p(t)]^q + [\Upsilon_p(t)]^q$: partendo da

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{K} \leq \mathcal{L}(t) \leq K\big[\mathcal{E}(t) + \Psi_p(t)\big] + \mathcal{Q}\Upsilon_p(t),$$

si perviene a

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{K} \leq \mathcal{L}_0(t) \leq \mathcal{Q}\big[\mathcal{E}(t) + \Psi_p(t) + \Upsilon_p(t)\big].$$

Quindi, sfruttando $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \leq \mathcal{Q}$, avremo

$$[\mathcal{L}_0(t)]^q \leq \mathcal{Q}\big[\mathcal{E}(t) + \Psi(t) + \Upsilon_p(t)\big]^q \leq \mathcal{Q}\big[\mathcal{E}(t) + [\Psi(t)]^q + [\Upsilon_p(t)]^q\big]$$

che, sostituita in (21), fornisce

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt}(t) + \frac{1}{\mathcal{Q}}[\mathcal{L}_0(t)]^q \leq [\Upsilon_p(t)]^q = \frac{\mathcal{Q}}{(1+t)^{pq}}.$$

In questa disequazione sopravvive un secondo membro non nullo che si puó eliminare osservando che $\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+t)^p} = -\frac{p}{(1+t)^{pq}}$. Si introduce quindi l'ultimo funzionale $\mathcal{L}_1(t)$

$$\mathcal{L}_0(t) \leq \mathcal{L}_1(t) := \mathcal{L}_0(t) + \frac{C}{(1+t)^p}$$

(con $C > 0$ da fissare opportunamente) che per definizione soddisfa

$$\frac{d\mathcal{L}_1(t)}{dt} + \frac{[\mathcal{L}_0(t)]^q}{\mathcal{Q}} + \frac{pC - \mathcal{Q}}{(1+t)^{pq}} \leq 0.$$

Scegliendo C tale che $pC - \mathcal{Q}(\|z_0\|) > 0$, segue

$$\frac{d\mathcal{L}_1(t)}{dt} + \frac{[\mathcal{L}_1(t)]^q}{\mathcal{Q}} \leq 0$$

che permette di concludere

$$\mathcal{E}(t) \leq\ K\mathcal{L}_0(t) \leq K\mathcal{L}_1(t) \leq \frac{\mathcal{Q}}{(1+t)^p} = \mathcal{Q}(\|z_0\|)\Lambda_p(t).$$

□

Osservazione 3.1. *Il limite del risultato per $p < \infty$ consiste nel fatto che, a fronte di un decadimento di μ di ordine $p+1$, si ottiene per l'energia un decadimento p. Tuttavia, se il nucleo di memoria, oltre alle ipotesi del Teorema 3.1, soddisfa, per qualche $p \geq 2$, la condizione*

$$\exists \delta > 0 \quad \textit{tale che} \quad \mu'(s) + \delta[\mu(s)]^{(p+1)/p} \leq 0$$

e, nel solo caso $p = 2$, si assume anche $\sqrt{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^+)$, allora l'energia $E(t)$ ha esattamente decadimento polinomiale p.

Un esempio che soddisfa tale proprietá per $p = 2$ è $\mu(s) = \dfrac{1}{[\log(s+2)]^3\sqrt{s(1+s)^3}}$.

4. I nostri risultati nell'intero spazio $N-$dimensionale

In [5] abbiamo affrontato il problema debolmente dissipativo ($\beta = 0$) nell'intero spazio $\mathbb{R}^N$, dove il sistema è

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t) - \alpha\Delta u(t) + \displaystyle\int_0^t \mu(s)\Delta u(t-s)ds = 0, & t > 0, \\ \lim_{|x|\to\infty} |u(x,t)| = 0 \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1. \end{cases} \tag{22}$$

Si assumono le stesse ipotesi specificate nella sezione precedente (in particolare, μ soddisfa (2), ($\star$) e $\mathcal{R}_\mu < 1/2$), perseguendo ancora l'obiettivo di trovare condizioni sul decadimento del nucleo di memoria sufficienti per il decadimento uniforme dell'energia del sistema

$$E(t) = \left(\alpha - \int_0^t \mu(s)ds\right)\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|\partial_t u(t)\|^2 + \int_0^t \mu(s)\|u(t) - u(t-s)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}ds,$$

dove $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} := \|\nabla v\|$. Il seguente Teorema è il principale risultato di [5]

Teorema 4.1. *Se il nucleo μ verifica (2), ($\star$) e la misura di piattezza $\mathcal{R}_\mu < 1/2$, allora:*

- *se esistono $C \geq 0$ e $\delta > 0$ tali che $\mu(s) \leq Ce^{-\delta s}$, $\forall s \geq 1$, allora $E(t) \leq \dfrac{\mathcal{Q}(R)}{(1+t)^{N/2}}$, dove $R > 0$ soddisfa*

$$E(0) + \|u_0\| + \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq R, \qquad \text{se } N \leq 2,$$

$$E(0) + \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq R, \qquad \text{se } N > 2;$$

- *se esistono $C \geq 0$ e $p > 0$ tali che $\mu(s) \leq \dfrac{C}{(1+s)^{p+1}}$, $\forall s \geq 1$, e se i dati iniziali soddisfano $E(0) + \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq R$, allora:*
  se $2p \neq N-2$, si ha $E(t) \leq \dfrac{\mathcal{Q}(R)}{(1+t)^{p^*}}$, dove $p^* = \min\left\{p, \dfrac{Np}{2p+2}\right\}$;
  se $2p = N-2$, si ha $E(t) \leq \dfrac{\mathcal{Q}(R)\log(2+t)}{(1+t)^p}$.

La dimostrazione coniuga i metodi utilizzati in un dominio limitato con la Trasformata di Fourier e le sue proprietá, motivo per cui intervengono le norme L^1. In particolare, per $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, denotiamo con $\widehat{v}$ l'usuale Trasformata di Fourier

$$\widehat{v}(\xi) = H\text{-}\lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|x|\leq M} e^{-ix\xi} v(x)dx.$$

Applicando la Trasformata al problema tradotto nello spazio delle storie, si perviene a

$$\begin{cases} \partial_{tt}\widehat{u}(t) + |\xi|^2\widehat{u}(t) + |\xi|^2 \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\widehat{\eta}^t(s)ds = 0, \qquad t > 0, \\ \partial_t\widehat{\eta}^t = T\widehat{\eta}^t + \partial_t\widehat{u}(t), \qquad t > 0, \\ \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0, \quad \partial_t\widehat{u}(0) = \widehat{u}_1, \quad \widehat{\eta}^0(s) = \widehat{u}_0, \end{cases} \tag{23}$$

nelle variabili $\widehat{u}(\xi,t)$ e $\widehat{\eta}^t(\xi,s)$. Di conseguenza, la densitá d'energia è

$$\mathcal{E}(\xi,t) = |\xi|^2|\widehat{u}(\xi,t)|^2 + |\partial_t\widehat{u}(\xi,t)|^2 + |\xi|^2\int_0^\infty \mu(s)|\widehat{\eta}^t(\xi,s)|^2 ds,$$

il cui integrale in ξ, per Teorema di Plancherel, è proprio l'energia

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi = \int_{|\xi|<1}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi + \int_{|\xi|\geq 1}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi. \tag{24}$$

La scomposizione in due integrali consente di ottenere stime per E ragionando sul comportamento di $\mathcal{E}$ dentro e fuori dalla palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. In particolare, ricordando (c),

$$\mathcal{E}(\xi,0) = \alpha|\xi|^2|\widehat{u}_0(\xi)|^2 + |\widehat{u}_1(\xi)|^2.$$

Moltiplicazioni standard consentono di provare

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\xi,t) - |\xi|^2\int_0^\infty \mu'(s)|\widehat{\eta}^t(\xi,s)|^2 ds + |\xi|^2\mathbb{J}[\widehat{\eta}^t;\xi] = 0, \tag{25}$$

dove ora

$$\mathbb{J}[\widehat{\eta}^t;\xi] := \sum_n [\mu(s_n^-) - \mu(s_n^+)]|\widehat{\eta}^t(\xi,s_n)|^2 \geq 0.$$

Utilizzando funzionali analoghi ai precedenti e, in particolare, per ogni $p \in (0,\infty]$,

$$\Psi_p(\xi,t) := \int_0^t \Upsilon_p(t-s)|\widehat{u}(\xi,s)|^2 ds,$$

con Υ_p definita come nella Sezione 3, si perviene alla disequazione differenziale

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\xi,t) + 2\varepsilon_0\mathcal{E}(\xi,t) \leq 0, \quad \text{per qualche} \quad \varepsilon_0 > 0,$$

dove il funzionale $\mathcal{L}(\xi,t)$ soddisfa

$$\frac{1}{k}\Big(1+\frac{1}{|\xi|^2}\Big)\mathcal{E}(\xi,t) \leq \mathcal{L}(\xi,t) \leq k\Big(1+\frac{1}{|\xi|^2}\Big)\mathcal{E}(\xi,t) + k|\xi|^2\Psi_p(\xi,t), \tag{26}$$

e, in particolare, $\mathcal{L}(\xi,0) \leq k\Big(1+\frac{1}{|\xi|^2}\Big)\mathcal{E}(\xi,0)$, per un opportuno $k > 0$.

Vediamo un po' piú in dettaglio la prima istanza del Teorema 4.1 (nucleo con decrescita esponenziale ovvero $p=\infty$), supponendo per semplicitá di dominare anche $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Procedendo come nel Teorema 3.1, per ε sufficientemente piccolo, si ha

$$\mathcal{E}(\xi,t) \leq \mathcal{E}(\xi,0)e^{-\varepsilon t}, \qquad |\xi| \geq 1,$$

stima da cui si ottiene una decrescita esponenziale per il secondo integrale in (24). Il decadimento polinomiale dell'energia si deve al primo contributo a $E(t)$, ovvero quello su $|\xi| < 1$: in questo caso, infatti, si ha la disequazione

$$\mathcal{E}(\xi, t) \leq k^2 \mathcal{E}(\xi, 0) e^{-\varepsilon |\xi|^2 t}, \qquad |\xi| < 1,$$

che, sostituita in (24), passando alle coordinate polari e utilizzando il lemma tecnico [5, Lemma 1.1], grazie al controllo su $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, conduce a

$$\int_{|\xi|<1} \mathcal{E}(\xi, 0) e^{-\varepsilon |\xi|^2 t} d\xi \leq \mathcal{Q}(R) \int_0^1 r^{N-1} e^{-\varepsilon r^2 t} dr \leq \frac{\mathcal{Q}(R)}{(1+t)^{N/2}}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera, R. Racke. *Energy decay for Timoshenko systems of memory type.* J. Differential Equations (Amsterdam), **194** (2003) 82–115.

[2] J.A.D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari, D.W. Reynolds. *On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity.* Math.Models Methods Appl. Sci. (Singapore), **16** (2006) 1677–1694.

[3] J.A.D. Appleby, D.W. Reynolds. *On necessary and sufficient conditions for exponential stability in linear Volterra integro-differential equations.* J. Integral Equations Appl. (Tempe), **16** (2004) 221–240.

[4] M. Conti, S. Gatti, V. Pata. *Uniform decay properties of linear Volterra integro-differential equations.* Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (Singapore), **18** (2008) 21-45.

[5] M. Conti, S. Gatti, V. Pata. *Decay rates of Volterra equations on* $\mathbb{R}^N$. Cent. Eur. J. Math. (Warsaw), **5** (2007) 720-732.

[6] C.M. Dafermos. *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity.* J. Differential Equations (Amsterdam), **7** (1970) 554-569.

[7] C.M. Dafermos. *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal. (Heidelberg), **37** (1970) 297–308.

[8] C.M. Dafermos. *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics.* in "Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics" (P. Germain and B. Nayroles, Eds.), pp.295–306, Lecture Notes in Mathematics no.503, Springer-Verlag Berlin-New York (1976).

[9] M. Fabrizio, C. Giorgi, V. Pata. *A new approach to equations with memory.* Arch. Ration. Mech. Anal. (Heidelberg), **198** (2010) 189-232.

[10] M. Fabrizio, B. Lazzari. *On the existence and asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids.* Arch. Rational Mech. Anal. (Heidelberg), **116** (1991) 139-152.

[11] M. Fabrizio, A. Morro. Mathematical problems in linear viscoelasticity, SIAM Studies in Applied Mathematics no.12, SIAM, Philadelphia (1992).

[12] M. Fabrizio, S. Polidoro. *Asymptotic decay for some differential systems with fading memory.* Appl. Anal. (Abingdon), **81** (2002) 1245-1264.

[13] C. Giorgi, J.E. Muñoz Rivera, V. Pata. *Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity.* J. Math. Anal. Appl. (Amsterdam), **260** 2001, 83-99.

[14] Z. Liu, S. Zheng. *On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity.* Quart. Appl. Math. (Providence), **54**(1996) 21–31.

[15] J.E. Muñoz Rivera. *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity.* Quart. Appl. Math. (Providence), **52**(1994) 629–648.

[16] J.E. Muñoz Rivera, E. Cabanillas Lapa. *Decay rates of solutions of an anisotropic inhomogeneous n-dimensional viscoelastic equation with polynomially decaying kernels.* Commun. Math. Phys. (Berlin), **177** (1996) 583-602.

[17] J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso. *On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation.* Asymptot. Anal. (Amsterdam), **49** (2006) 189–204.

[18] J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso, E. Vuk. *Asymptotic behaviour of the energy for electromagnetic systems with memory.* Math. Methods Appl. Sci. (Chichester), **27** (2004) 819–841.

[19] J.E. Muñoz Rivera, R. Racke. *Magneto-thermo-elasticity – large-time behavior for linear systems.* Adv. Differential Equations (Athens), **6** (2001) 359–384.

[20] S. Murakami. *Exponential asymptotic stability for scalar linear Volterra equations.* Differential Integral Equations (Athens), **4** (1991) 519–525.

[21] V. Pata. *Exponential stability in linear viscoelasticity.* Quart. Appl. Math. (Providence), **64** (2006) 499-513.

[22] V. Pata. *Exponential stability in linear viscoelasticity with almost flat memory kernels.* Commun. Pure Appl. Anal. (Springfield), **9** (2010) 721-730.