Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2010-11

Angelo Favini

Potenze frazionarie e teoria della interpolazione per operatori lineari multivoci ed applicazioni

4 febbraio 2011

Sunto

Si studiano proprietá intermedie per i domini delle potenze frazionarie di un operatore lineare multivoco A di tipo debolmente parabolico. In particolare, i risultati evidenziano il ruolo speciale giocato dal sottospazio lineare $A0$. Si studia il comportamento del semigruppo singolare generato da A rispetto ai domini delle potenze frazionarie. Tali risultati vengono applicati nello studio della regolaritá massimale nel tempo e nello spazio per equazioni multivoche di evoluzione. Alcuni casi concreti di equazioni alle derivate parziali illustrano i risultati astratti.

Abstract

We provide intermediate properties for the domains of the fractional powers of an abstract multivalued linear operator A of weak parabolic type. In particular, the results exhibit the special role played by the linear subspace $A0$. The behaviour of the singular semigroup generated by A with respect to the domains of the fractional powers is then studied. Such results are applied to maximal time and space regularity for solutions to abstract multivalued evolution equations. Some concrete cases of partial differential equations enlighten the abstract results.

All'inizio di questo ciclo di seminari, ancora una volta voglio ricordare il Professor BRUNO PINI, il nostro maestro, dalla cui iniziativa sono originati questi tradizionali seminari di anilisi, che testimoniano la validitá di tanti ricercatori che da Lui sono stati indirizzati e stimolati verso questo tipo di ricerca e di piú giovani talenti che hanno potuto sviluppare le loro potenzialitá in questo ambiente.

Al nostro maestro indirizzo un commosso pensiero.

1. Introduzione

In questo seminario vengono esposti alcuni recentissimi risultati, ottenuti in collaborazione con il dottor Alberto Favaron, su potenze frazionarie e teoria dell'interpolazione per operatori lineari multivoci, con applicazioni ad equazioni differenziali degeneri [5].

Lo scopo principale é di stabilire proprietá intermedie per i domini delle potenze frazionarie di operatori lineari multivoci A da uno spazio di Banach in sé.

Questa classe di operatori consiste di trasformazioni che hanno un risolvente single-valued soddisfacente la stima risolvente debolmente parabolica

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\|_X \leq c(1+|\lambda|)^{-\beta}\|x\|_X, \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \Sigma_\alpha \tag{1}$$

dove

$$\Sigma_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C}, \ Re\lambda \geq -c(1+|\lambda|)^\alpha\}, \ \alpha \in [\beta, 1], \ c > 0.$$

Se A é single-valued densamente definito e soddisfa (1) con $\beta = \alpha = 1$, allora é ben noto che i domini $D((-A)^\theta)$, $Re\theta \in (0,1)$, soddisfano la proprietá intermedia

$$(X, D(A))_{Re\theta,1} \hookrightarrow D((-A)^\theta) \hookrightarrow (X, D(A))_{Re\theta,\infty}, \tag{2}$$

vedi Kamatsu [11, 12, 13], Triebel [19], dove $(X, D(A))_{\gamma,p}$, $\gamma \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty]$, sono gli spazi di interpolazione reale fra X e $D(A)$.

La relazione (2) é decisiva in moltissimi risultati astratti. Per esempio, é il punto di partenza nella teoria astratta di equazioni paraboliche semilineari (cfr. le monografie di Henry e Lunardi [10, 14]).

Nel caso di $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$, al momento non ci sono risultati.

Stime del tipo (2) appaiono giá in letteratura quando A é single-valued. Vedi Taira [16], Periago [17], Periago-Straub [18], Von Wahl [20, 21], Wild [22]. Le potenze frazionarie di questi operatori multivoci sono utilizzate in Favini-Yagi [6, 7] per ottenere risultati di esistenza, unicitá e regolaritá di soluzioni di inclusioni differenziali lineari e in Favini-Yagi [8] (cfr. anche Melnikova [15]) per equazioni quasi-lineari e semilineari.

Il principale obiettivo della ricerca é quello di estendere le inclusioni (2) al caso multivoco e di mostrarne applicazioni ad equazioni di evoluzione degeneri.

2. Operatori lineari multivoci

Sia X uno spazio di Banach complesso con norma $\|\cdot\|_X$ e sia 2^X la collezione di tutti i sottoinsiemi di X. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $F_i \in 2^X \setminus \emptyset$, λF_i e $F_1 + F_2$ sono, rispettivamente, $\{\lambda f_i,\ f_i \in F_i\}$ e $\{f_1 + f_2,\ f_i \in F_i,\ i = 1,\ 2\}$. Una applicazione A da X in 2^X é detta essere un operatore lineare multivoco se $D(A) = \{x \in X,\ Ax \notin \emptyset\}$ é un sottospazio vettoriale di X e A soddisfa

i) $Ax + Ay \subset A(x + y),\ x,\ y \in D(A)$,
ii) $\lambda Ax \subset A(\lambda x),\ \forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in D(A)$.

Se $U \in 2^X,\ A(U) = \cup_{u\in U} Au$, l'insieme

$$R(A) = A(X) = A(D(A))$$

viene detto il rango di A. Se $R(A) = X$, A si dice suriettivo.

Si vede facilmente che

iii) $A0$ é un sottospazio lineare di X e $Ax = y + A0$ per ogni $y \in Ax$, $x \in D(A)$. Cosí, A é single-valued se e solo se $A0 = \{0\}$.

L'inverso A^{-1} di un operatore multivoco A é un operatore multivoco tale che $D(A^{-1}) = R(A)$ e $\forall y \in D(A^{-1})\ A^{-1}y = \{x \in D(A) : y \in Ax\}$. Segue che $(A^{-1})^{-1} = A$.

L'insieme

$$A^{-1}0 = \{x \in D(A), 0 \in Ax\}$$

viene detto il nucleo di A e denotato come $Ker(A)$.

Se $Ker(A) = \{0\}$, cioé, A^{-1} é single-valued, si dice che A é iniettivo.

Se A_i é multivoco in $X,\ i = 1, 2$ e $z \in \mathbb{C}$, sono definiti gli operatori zA_i, $A_1 + A_2$, A_1A_2 ponendo

$$D(zA_i) = \{D(A_i)\},\ (zA_i)x = zA_ix,\ z \in \mathbb{C}, x \in D(zA_i)\},$$

$$D(A_1 + A_2) = \{D(A_1) \cap D(A_2)\},\ (A_1 + A_2)(x) = A_1x + A_2x,\ x \in D(A_1 + A_2),$$

$$D(A_1A_2) = \{x \in D(A_2),\ A_1(A_2)x \neq \emptyset\},\ (A_1A_2)(x) = A_1(A_2x),\ x \in D(A_1A_2)$$

A é iniettivo (rispettivamente, single valued) se e solo se $A^{-1}A = I|_{D(A)}$ (rispettivamente $AA^{-1} = I|_{R(A)}$).

Poiché $A^0 = I,\ D(A^0) = X$ si definisce A^n, per $n \in \mathbb{N}$, mediante

$$A^n x = (AA^{n-1})(x) = \cup_{y \in D(A) \cap A^{n-1}x}\ Ay,\ x \in D(A^n).$$

Se A e B sono operatori multivoci in X, si scrive $A \subset B$ se $D(A) \subset D(B)$ e $Ax \subset Bx$ per ogni $x \in D(A)$

Se $A \subset B$ e $Ax = Bx$ per ogni $x \in D(A)$, si dice che B é una estensione di A.

Se un operatore lineare SINGLE-VALUED S ha dominio $D(S) = D(A)$ e $S \subset A$, si dice che S é una sezione di A.

Un metodo per costruire sezioni lineari di operatori multivoci é descritto nella monografia di CROSS [2, Proposition 7.5.2].

Se $X,\ Y$ sono spazi di Banach complessi, $\mathcal{L}(X,Y)$ denota lo spazio degli operatori lineari continui da X in Y munito della norma uniforme. Se $X = Y$, $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$.

Se A é un operatore lineare multivoco in X, l'insieme risolvente $\rho(A)$ di A é

$$\Big\{\lambda \in \mathbb{C},\ D\Big((\lambda I - A)^{-1}\Big) = X\ e\ (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\Big\}.$$

Valgono proprietá analoghe a quelle degli operatori single-valued. Per esempio, se $\rho(A) \neq \emptyset$ allora A é chiuso, cioé il suo grafico é chiuso in $X \times X$ cfr. CROSS [2, p. 43].

Inoltre, $\rho(A)$ é un insieme aperto di $\mathbb{C}$ e la funzione $z \in \rho(A) \to (zI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é olomorfa. Finalmente, vale l'equazione risolvente

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}.$$

Diversamente dal caso single-valued, si ha

$$(zI - A)^{-1}A \subset z(zI - A)^{-1} - I \subset A(zI - A)^{-1},\ z \in \rho(A).$$

Cosí se $z \in \rho(A)$, $z(zI - A)^{-1} - I$ é solo una sezione lineare limitata dell'operatore multivoco $A(zI - A)^{-1}$. Tale sezione é denotata con

$$A^0(zI - A)^{-1}$$

A^0 non é necessariamente una sezione di A.

Si noti che $(zI - A)^{-1}A$, $z \in \rho(A)$, é single-valued su $D(A)$ e $(zI - A)^{-1}Ax = (zI - A)^{-1}y$ $\forall y \in Ax$. $Ker((zI - A)^{-1}) = (zI - A)0 = A0$ $\forall z \in \rho(A)$.

Inoltre

$$A^0(zI - A)^{-1} = (zA^{-1} - I)^{-1},\ \forall z \in \rho(A).$$

Si vede anche che se $0 \in \rho(A)$, allora

$$Ker(A^0(zI - A)^{-1}) = \{0\},\ \forall z \in \rho(A).$$

Diremo che l'operatore lineare multivoco A in X soddisfa la condizione

(H1) se $\rho(A) \supseteq \Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} :\ Rez \geq -c(1 + |Imz|)^\alpha\}$, $\alpha \in (0, 1]$, $c > 0$ e $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-\beta}$, $\forall \lambda \in \Sigma_\alpha$ dove $\beta \in (0, \alpha]$.

L'assunzione (H1), detta di tipo debolmente parabolico, implica che A genera un semigruppo infinitamente differenziabile di operatori lineari su X, definito da

$$\begin{aligned} e^{0\cdot A} &:= I \\ e^{tA} &:= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda,\ t > 0 \end{aligned}$$

dove $\Gamma \subset \Sigma_\alpha \setminus \{z \in \mathbb{C} :\ Rez \geq 0\}$ é la curva parametrizzata da $\lambda = -c(1 + |\eta|)^\alpha + i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Allora si vede [7, Section 3] che $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ é un semigruppo su X, fortemente differenziabile su $t > 0$, con

$$D_t^k e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^k e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,\ t>0,\ k\in\mathbb{N}.$$

Poiché $Ker((zI-A)^{-1}) = A0,\ z\in\rho(A)$

$$A0 \subseteq \cap_{t>0} Ker(e^{tA}).$$

Se vale (H1), si munisce $D(A)$ della norma

$$\|x\|_{D(A)} = \inf_{y\in Ax} \|y\|_X,\ x\in D(A).$$

Poiché $A^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, tale norma é equivalente alla norma del grafico, e $D(A)$ é uno spazio di Banach.

Scrivendo $X_1 \hookrightarrow X_2$ se $X_1\subseteq X_2$ e $\exists c>0\ \|x\|_{X_2}\le c\|x\|_{X_1}$, $\forall x\in X_1$, si vede facilmente che $D(A)\hookrightarrow X$.

3. Le potenze frazionarie $(-A)^{\pm\theta}$ per $Re\theta > 1-\beta$.

Sia A un operatore soddisfacente (H1). Allora definiamo le potenze frazionarie $(-A)^{-\theta}$ di $-A$ per mezzo di

$$(-A)^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^{-\theta}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,\ \theta\in\mathbb{C},\ Re\theta > 1-\beta,$$

cfr. Favini-Yagi [7] per il caso multivoco e Taira [16] per il caso single-valued.

Si intende $(-\lambda)^{-\theta} = e^{-\theta\log(-\lambda)}$, la determinazione olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\ Rez\ge 0\}$, per cui $\log z = \ln|z| + i\arg(z)$, $\arg(z)\in(-\pi,\pi)$.

Poiché $\forall\lambda\in\Gamma$, e $\xi\in\mathbb{C}$, si ha

$$|(-\lambda)^\xi| = |e^{\xi\log(-\lambda)}| = |\lambda|^{Re\xi} e^{-Im\xi\arg(-\lambda)} \le |\lambda|^{Re\xi} e^{\frac{\pi}{2}|Im\xi|},$$

e $|\lambda|\ge c$ per $\lambda\in\Gamma$, se $Re\theta > 1-\beta$, si vede che

$$\|(-A)^{-\theta}x\|_X \le 2Ce^{\frac{\pi}{2}|Im\theta|}(Re\theta+\beta-1)^{-1}e^{-Re\theta-\beta+1}\|x\|_X$$

Allora $(-A)^{-\theta}$ é ben definito e appartiene a $\mathcal{L}(X)$ $\forall\theta\in\mathbb{C}$, $Re\theta > 1-\beta$.

Se $Re\theta > 1-\beta$, definiamo $(-A)^{\theta}$ come l'inverso (multivoco) di $(-A)^{-\theta}$. Si vede allora che $0 \in \rho((-A)^{\theta})$ e $(-A)^{\theta}$ é un operatore lineare multivoco chiuso. Inoltre, estendendo Taira [16] e Favaron [3, p. 252], se $\beta \in (1/2, \alpha]$, $\alpha \in (1/2, 1]$, allora

$$D(A) \subseteq D((-A)^{\theta}),\ Re\theta \in (1-\beta, \beta).$$

Si ha

$$I = (-A)^{-\theta}(-A)^{\theta} \text{ su } D((-A)^{\theta}),$$
$$I \subset (-A)^{\theta}(-A)^{-\theta} \text{ su } X.$$

Se A é single-valued, Taira [16, Proposition 6 (iii)] dimostra che $(-A)^{-\theta}$ é iniettivo per $Re\theta > 1-\beta$ e cosí $(-A)^{\theta}$ é un operatore single-valued e la seconda inclusione sopra diventa una uguaglianza.

Poiché $A0 \subseteq Ker((-A)^{-\theta})$, l'iniettvitá di $(-A)^{-\theta}$ non é in generale vera nel caso multivoco.

Vale il seguente risultato

Proposizione 3.1. *Sia A un operatore soddisfacente (H1). Allora*

$$D((-A)^{\theta_1}) \hookrightarrow D((-A)^{\theta_2}),\ 1-\beta < Re\theta_2 < Re\theta_1 + \beta - 1.$$

Sia e^{tA} il semigruppo generato dall'operatore multivoco A.

Poniamo

$$[(-A)^{\theta}]^0 e^{tA} := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (-\lambda)^{\theta} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,\ Re\theta \geq 0,\ t > 0.$$

Chiaramente

$$A0 \subseteq \cap_{t>0} Ker([(-A)^{\theta}]^0 e^{tA}),\ Re\theta \geq 0.$$

Segue anche che

$$[(-A)^0]^0 e^{tA} = e^{tA},\ t > 0.$$

Usando equazione risolvente e teorema dei residui, si ha

$$[(-A)^1]^0 e^{tA}(-A)^{-\theta} = [(-A)^{1-\theta}]^0 e^{tA},\ Re\theta \in (1-\beta, 1],\ t > 0.$$

Inoltre

$$\|[(-A)^\theta]^0 e^{tA}\|_{\mathcal{L}} \le C_{\alpha,\beta,\theta} t^{\frac{\beta,-Re\theta-1}{\alpha}},\ Re\theta \ge 0,\ t \ge 0.$$

$$(-1)^k D_t^k e^{tA} = [(-A)^k]^0 e^{tA} \subset (-A)^k e^{tA},\ t > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Il seguente lemma generalizza Lunardi [14], Lemma 2.1.6, a operatori lineari multivoci:

Lemma 3.1. *Siano α, β come in (H1), $\alpha + \beta > 1$. Allora*

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{tA} x dt = (zI - A)^{-1} x\ \forall Re z > 0,\ \forall x \in X.$$

Ricordo infine che le potenze frazionarie di operatori multivoci soddisfacenti (H1) con $\alpha = \beta = 1$ sono state trattate da Alarabiou [1].

4. Gli spazi $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$

Sia A multivoco soddisfacente (H1).

Se Y é uno spazio di Banach, $C((0,\infty), Y)$ denota l'insieme delle funzioni continue da $(0,\infty)$ a Y. Se g é fortemente misurabile da $(0,\infty)$ a Y, poniamo

$$\|g(\cdot)\|_{L_q^*(Y)} = \left(\int_0^{+\infty} \|g(\xi)\|_Y^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}},\ q \in (1, +\infty),$$
$$\|g(\cdot)\|_{L_\infty^*(Y)} = \sup_{\xi \in (0,+\infty)} \|g(\xi)\|_Y.$$

Se $p_0,\ p_1 \in [1, +\infty)$ oppure $p_0 = p_1 = +\infty$, $\gamma \in (0,1)$, definiamo gli spazi di medie di LIONS-PEETRE

$$\begin{aligned}
(X, D(A))_{\gamma,p} &= \{x \in X:\ x = v_0(t) + v_1(t),\ t \in (0,+\infty),\ v_0 \in C((0,+\infty), X),\\
&\quad v_1 \in C((0,+\infty), D(A)), \|t^\gamma v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(X)} + \|t^{\gamma-1} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(D(A))} < +\infty\},\\
\|x\|_{(X,D(A))_{\gamma,p}} &= \inf_{v_0,v_1} \{\|t^\gamma v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(X)} + \|t^{\gamma-1} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(D(A))}\},
\end{aligned}$$

dove l'estremo inferiore é preso su tutte le possibili rappresentazioni di x nella forma specificata.

Sappiamo che $(X, D(A))_{\gamma,p}$ é uno spazio di interpolazione esatta di esponente γ fra X e $D(A)$. Si ha

$$\|x\|_{(X,D(A))_{\gamma,p}} \le C_1(\gamma, p)\|x\|_X^{1-\gamma}\|x\|_{D(a)}^\gamma.$$

Se $\gamma \in (0, 1)$, $1 \le p_1 \le p \le p_2 \le +\infty$,

$$D(A) \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p_1} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p_2} \hookrightarrow \overline{D(A)},$$

$$0 < \gamma_2 < \gamma_1 < 1 \ \Rightarrow (X, D(A))_{\gamma_1,+\infty} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma_2,1}.$$

Se $\gamma \in (0, 1)$ e $p \in [1, +\infty]$ definiamo lo spazio di Banach

$$X_A^{\gamma,p} = \{\xi \in X : [x]_{X_A^{\gamma,p}} := \|\xi^\gamma A^0(\xi I - A)^{-1}x\|_{L^*_p(X)} < +\infty\},$$

$$\|x\|_{X_A^{\gamma,p}} = \|x\|_X + [x]_{X_A^{\gamma,p}}.$$

Se A é single-valued e $\beta = 1$ in (H1), $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$ coincidono, con equivalenza delle norme, vedi Grisvard [9].

Osserviamo che $X_A^{\gamma,p} \cap A0 = \{0\}$ $\forall\gamma \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty]$. Infatti, se $\exists x \ne 0$, $x \in X_A^{\gamma,p} \cap A0$, perché $x \in A0$,

$$A^0(\xi I - A)^{-1}x = \xi(\xi I - A)^{-1}x - x = -x,\ \forall\xi \in \rho(A)$$

e cosí

$$[x]_{X_A^{\gamma,p}} = \|\xi^\gamma\|_{L_p^*}\|x\|_X = +\infty.$$

Il prossimo risultato estende Favini-Yagi [7] a $p \in [1,+\infty)$.

Proposizione 4.1. *Se A soddisfa (H1), allora $X_A^{\gamma,p} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p}$, $\gamma \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$, $(X, D(A))_{\gamma,p} \hookrightarrow X_A^{\gamma+\beta-1,p}$, $\gamma \in (1-\beta, 1)$, $p \in [1,+\infty)$.*

La dimostrazione non é banale.

Osserviamo che $\{0\} \subseteq (X, D(A))_{\gamma,p} \cap A0 \subseteq X_A^{\gamma+\beta-1,p} \cap A0 = \{0\}$, $\gamma \in (1-\beta, 1)$. Inoltre, $D(A) \cap A0 = \{0\}$ poiché $D(A) \cap A0 \subseteq X_A^{\varphi,p} \cap A0\ \forall \varphi \in (0,\beta)$, $p \in [1,+\infty]$. In particolare, se A soddisfa (H1) e $D(A) = X$, da $D(A) \cap A0 = \{0\}$ segue $A0 = \{0\}$, cosicché A é necessariamente single-valued.

5. La forte continuitá di e^{tA} su $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$.

Si dimostra le seguenti proprietá

Proposizione 5.1. *Sia A multivoco soddisfacente (H1). Se $\gamma \in (1-\beta, 1)$, allora e^{tA} é fortemente continuo nella norma di X su $(X, D(A))_{\gamma,p}$ e $X_A^{\gamma,p}$, $p \in [1,+\infty]$.*

Corollario 5.1. *Se A multivoco soddisfacente (H1) con $\alpha+\beta > 1$ e $Y_\gamma^P \in \{(X, D(A))_{\gamma,p}, X_A^{\gamma,p}\}$, $\gamma \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty[$, allora $\exists c = c(\alpha,\beta,\gamma,p)$ tale che*

$$\|e^{tA} - I\|_{\mathcal{L}(Y_\gamma^p, X)} \leq Ct^{\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{\alpha}},\ t > 0,\ \gamma \in (2-\alpha-\beta, 1),\ p \in [1,+\infty].$$

6. Proprietá intermedie di $D((-A)^\theta)$.

Se A soddisfa (H1), $\gamma \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty]$ si prova che

$$\|[(-A)^1]^0 e^{tA}\|_{\mathcal{L}(Y_\gamma^p, X)} \leq ct^{\frac{\beta+\gamma-2}{\alpha}},\ t > 0.$$

Si introduce allora lo spazio

$$D_A(\gamma,p) = \{x \in X:\ |x|_{D_A(\gamma,p)} := \|\xi^{\frac{2-\beta-\gamma}{\alpha}}[(-A)^1]^0 e^{\xi A}x\|_{\mathcal{L}_p^*(X)} < +\infty\},$$

$$\|x\|_{D_A(\gamma,p)} = \|x\| + |x|_{D_A(\gamma,p)},$$

Verranno stabilite relazioni di inclusione fra $(X, D(A))_{\gamma,p}$, $X_A^{\gamma,p}$ e $D_A(\gamma, p)$. Verrá evidenziato il ruolo speciale giocato dal sottospazio lineare $A0$.

Proposizione 6.1. *Se A soddisfa (H1), allora $\forall \gamma \in (0, 1)$*

$$X_A^{\gamma,p} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,p} \hookrightarrow D_A(\alpha\gamma, p),\ \ p \in [1, +\infty[,$$

$$X_A^{\gamma,\infty} \hookrightarrow (X, D(A))_{\gamma,\infty} \hookrightarrow D_A(\gamma, \infty).$$

Inoltre se $\alpha + \beta > 1$, allora $\forall \gamma \in (1 - \alpha - \beta, 1)$ e $\delta \in (0, \frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{\alpha})$:

$$\{0\} \cup [D_A(\gamma, p) \setminus A0] \hookrightarrow X_A^{\delta,p} \hookrightarrow (X, D(A))_{\delta,p},\ \ p \in [1, +\infty[$$

$$\{0\} \cup [D_A(\gamma, \infty) \setminus A0] \hookrightarrow X_A^{\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{\alpha},\infty} \hookrightarrow (X, D(A))_{\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{\alpha},\infty}.$$

$\{0\} \cup [D_A(\gamma, p) \setminus A0]$ é uno spazio normato su $\mathbb{C}$ con norma $\|\cdot\|_{D_A(\gamma,p)}$.

Da questa proposizione si ottengono i teoremi principali del lavoro.

Teorema 6.1. *Sia A multivoco soddisfacente (H1), con $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\beta \in (\frac{1}{2}, \alpha]$. Allora $\forall \theta \in \mathbb{C}$, $Re\theta \in (-\beta, \beta)$,*

$$D(A) \hookrightarrow X_A^{Re\theta,1} \subseteq \{0\} \cup [D((-A)^\theta) \setminus A0]$$

Teorema 6.2. *Sia A multivoco soddisfacente (H1), con $\alpha + \beta > 1$. Allora $\forall \theta \in \mathbb{C}$ tale che $Re\theta \in (2 - \alpha - \beta, 1)$ si ha*

$$\{0\} \cup [D((-A)^\theta) \setminus A0] \hookrightarrow X_A^{\frac{\alpha+\beta+Re\theta-2}{\alpha},\infty}.$$

Il risultato successivo generalizza il teorema valido per gli operatori single-valued A soddisfacenti (H1) con $\beta = 1$ e densamente definiti secondo cui

$$X_A^{\theta,1} = (X, D(A))_{\theta,1} \hookrightarrow D((-A)^\theta) \hookrightarrow X_A^{\theta,\infty} = (X, D(A))_{\theta,\infty},\ \ 0 < \theta < 1.$$

Teorema 6.3. *Sia A multivoco soddisfacente (H1), con $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1]$ e $\beta \in (1-\frac{\alpha}{2}, \alpha]$. Allora $\forall\theta$, $Re\theta \in (2-\alpha-\beta, \beta)$,*

$$D(A) \hookrightarrow X_A^{Re\theta,1} \hookrightarrow \{0\} \cup [D((-A)^\theta) \setminus A0] \hookrightarrow X_A^{\frac{\alpha+\beta+Re\theta-2}{\alpha},\infty}.$$

$[D((-A)^\theta) \setminus A0]$ é uno spazio normato su $\mathbb{C}$ con norma $\|\cdot\|_{D((-A)^\gamma)}$.

7. Sul comportamento di e^{tA} rispetto a $D((-A)^\theta)$.

Studiamo il comportamento di $[(-A)^\theta]^0 e^{tA}$, $Re\theta \geq 0$, rispetto ai domini $D((-A)^\gamma)$, $Re\gamma > 1-\beta$.

Proposizione 7.1. *Sia $Re\gamma \in (-\beta, \beta)$, $\beta \in (\frac{1}{2}, \alpha]$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $Re\theta \geq 0$. Allora $\exists c = c(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$ tale che*

$$\|[(-A)^\theta]^0 e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X, D((-A)^\gamma))} \leq ct^{\frac{\beta-Re\gamma-Re\theta-1}{\alpha}},\ t>0.$$

Dato uno spazio di Banach complesso $(Z, \|\cdot\|_Z)$, $C([0,T];Z) = C^0([0,T];Z)$, $C^\delta([0,T];Z)$, $\delta \in (0,1)$, denotano rispettivamente gli spazi di tutte le funzioni continue e δ-hölderiane da $[0,T]$ in Z, con

$$\|g\|_{C^\delta([0,T];Z)} = \begin{cases} \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|_Z & \text{se } \delta = 0, \\ \|g\|_{0,T;Z} + |g|_{\delta;T;Z} & \text{se } \delta \in (0,1), \end{cases}$$

$|g|_{\delta;T;Z} = \sup_{0\leq s<t\leq T}(t-s)^{-\delta}\|g(t)-g(s)\|_Z$, $\|g\|_{0,T;Z} = \sup_{0\leq t\leq T}\|g(t)\|_Z$.

$$C^{1+\delta}([0,T];Z) := \{g \in C([0,T];Z),\ D_t g \in C^\delta([0,T];Z)\}$$

$\|g\|_{1+\delta} = \|g\|_{0,T;Z} + \|D_t g\|_{\delta,T;Z}$.

Lemma 7.1. *Sia $2\alpha+2\beta > 3$. Allora $\forall Re\gamma \in (1-\beta, 2\alpha+\beta-2)$, $\delta \in (0, \frac{2\alpha+\beta-Re\gamma-2)}{\alpha})$ l'operatore lineare*

$$[\varphi_1 g](t) := \int_0^t e^{(t-s)A} g(s)ds,\ t\in[0,T],$$

trasforma $C([0,T];X)$ in $C^\delta([0,T];D((-A)^\gamma))$ e soddisfa

$$\|Q_1 g\|_{\delta,T;D((-A)^\gamma)} \leq T^{\frac{2\alpha+\beta-Re\gamma-\alpha\delta)}{\alpha}} C(T)\|g\|_{0,T;X}.$$

Lemma 7.2. *Sia* $\alpha + 2\beta > 2$, $x \in D((-A)^{\varphi}))$, $Re\varphi \in (3 - \alpha - 2\beta, 1]$. *Allora* $\forall Re\gamma \in (1 - \beta, \alpha + \beta + Re\varphi - 2)$ *e* $\delta \in (0, \frac{\alpha+\beta-Re\gamma+Re\varphi-2)}{\alpha})$ *vale* $e^{tA}x \in C^{\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$ *e*

$$\|e^{\cdot A}x\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq C(T)\|x\|_{D((-A)^{\varphi})}.$$

Lemma 7.3. *Sia* $2\alpha + 2\beta > 3$. *Allora* $\forall \mu \in (\frac{3-\alpha-2\beta}{\alpha}, 1)$, $Re\gamma \in (1 - \beta, \alpha\mu + \alpha + \beta - 2)$, $\delta \in (0, \frac{\alpha\mu+\alpha+\beta-Re\gamma-2}{\alpha})$, *l'operatore lineare*

$$[Q_2 f](t) = e^{tA}[f(t) - f(0)], \ t \in [0,T],$$

mappa $C^{\mu}([0,T]; X)$ *in* $C^{\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$ *e*

$$\|Q_2 f\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq T^{\frac{\alpha\mu+\alpha+\beta-Re\gamma-2\alpha\delta}{\alpha}} C(T)\|f\|_{\mu,T;X}.$$

Lemma 7.4. *Sia* $3\alpha + 2\beta > 4$. *Allora* $\forall \mu \in (\frac{4-2\alpha-2\beta}{\alpha}, 1)$, $Re\gamma \in (1 - \beta, \alpha\mu + 2\alpha + \beta - 3)$, $\delta \in (0, \frac{\alpha\mu+2\alpha+\beta-3}{\alpha})$, *l'operatore lineare*

$$[Q_3 f](t) = -\int_0^t [(-A)^1]^0 e^{(t-s)A}[f(s) - f(t)]ds, \ t \in [0,T],$$

mappa $C^{\mu}([0,T]; X)$ *in* $C^{\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$ *e*

$$\|Q_3 f\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq T^{\frac{\alpha\mu+2\alpha+\beta-Re\gamma-3-\alpha\delta}{\alpha}} C(T)\|f\|_{\mu,T;X}.$$

8. Applicazioni

Utilizzeremo le potenze frazionarie di $-A$ per risolvere il problema di Cauchy

$$D_t u(t) \in Au(t) + f(t), \ t \in (0,T] \tag{3}$$

$$u(0) = u_0 \in X. \tag{4}$$

$u(t)$ é detta soluzione stretta del problema di Cauchy, dove $f \in C([0,T]; X)$, se $u \in C^1([0,T]; X)$ $u(t) \in D(A)$ $\forall t \in (0,T]$ e u soddisfa l'equazione. La condizione iniziale nel senso $\|A^{-1}[u(t) - u(0)]\|_X \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Si dice che u é soluzione CLASSICA se soddisfa l'equazione e $u \in C([0,T]; X)$ e quindi $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = u_0$.

Teorema 8.1. *Sia* $2\alpha+2\beta > 3$, $u_0 \in D((-A)^{\varphi})$, $Re\varphi \in (3-\alpha-2\beta, \alpha)$, $f \in C^{\mu}([0,T];X)$, $\mu \in (\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha}, 1)$. *Allora* $\forall Re\gamma \in (1-\beta, \alpha+\beta+Re\varphi-2)$ *e* $\delta \in (0, \frac{\alpha+\beta-Re\gamma-Re\varphi-2}{\alpha})$ *il problema (3),(4) ha una unica soluzione classica* $u \in C^{\delta}([0,T];D((-A)^{\gamma}))$ *e*

$$\|u\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq C(T)\|u_0\|_{D((-A)^{\gamma})} + T^{\frac{2\alpha+\beta-Re\gamma-2-\alpha\delta}{\alpha}} C_1(T)\|f\|_{0,T;X},$$

per determinate costanti $C(T)$ *e* $C_1(T)$.

Vale poi il seguente risultato di regolaritá massimale

Teorema 8.2. *Sia* $3\alpha+2\beta > 4$, $f \in C^{\mu}([0,T];X)$, $\mu \in (\frac{4-2\alpha-2\beta}{\alpha}, 1)$. *Sia* $u_0 \in D(A)$ *ed esista* $u_1 \in Au_0$ *tale che* $u_1 + f(0) =: g_0 \in D((-A)^{\varphi})$, $Re\varphi \in (3-\alpha-2\beta, \alpha\mu+\alpha-1)$. *Allora* $\forall Re\gamma \in (1-\beta, \alpha+\beta+Re\varphi-2)$ *e* $\delta \in (0, \frac{\alpha+\beta-Re\gamma+Re\varphi-2}{\alpha})$ *il problema (3),(4) ha una unica soluzione classica* $u \in C^{1+\delta}([0,T];D((-A)^{\gamma}))$. *Inoltre*

$$\|D_t u\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq C(T)\|g_0\|_{D((-A)^{\varphi})} + T^{\frac{\alpha\mu+2\alpha+\beta-Re\gamma-3-\alpha\delta}{\alpha}} C(T)\|f\|_{\mu,T;X}.$$

essendo $C(T) = T^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} C_1(T) + C_2(T)$, *dove* $C(T)_1$, $C_2(T)$ *sono determinate funzioni* T.

Osserviamo che piú grande é la parte reale del parametro γ sul dominio $D((-A)^{\gamma})$ dove abbiamo la regolaritá spaziale, piú piccolo é l'intervallo dove l'esponente di Hölder δ della regolaritá temporale. Il Teorema 8.2 permette di trattare

$$D_t(Mv(t)) = Lv(t) + f(t),\ t \in (0,T),\ Mv(0) = u_0 \tag{5}$$

dove L, M sono single-valued operanti linearmente da X in se, $D(L) \subseteq D(M)$, M non avendo inverso limitato. Posto $\rho_M L := \{z \in \mathbb{C} :\ R(zM-L) = X \text{ e } (zM-L)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$, é mostrato in Favini-Yagi [7] che

$$\rho_M(L) \subseteq \rho(LM^{-1}) \text{ e } M(zM-L)^{-1} = (zI - LM^{-1})^{-1},\ z \in \rho_M(L).$$

Se si assume che $\rho_M(L)$ contiene una regione Σ_α e

(H2) $\|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1+|\lambda|)^{-\beta},\ \forall \lambda \in \Sigma_\alpha,$

introducendo l'operatore A

$$D(A) = \{u \in \mathcal{R}(M),\ u = Mv \text{ per un } v \in D(L)\}$$

$$Au = \{Lv,\ v \in D(L) \text{ tale che } u \neq Mv\}$$

il problema (5) é ridotto a (3),(4).

Si ottiene il seguente miglioramento di risultati in Favini-Yagi [7] e Favaron [3].

Teorema 8.3. *Valga (H2) con* $3\alpha + 2\beta > 4$, $f \in C^{\mu}([0,T];X)$, $\mu \in (\frac{4-2\alpha-2\beta}{\alpha}, 1)$, $A = LM^{-1}$, $u_0 = Mv_0 \in D(A)$ *dove* $v_0 \in D(L)$ *soddisfa* $Lv_0 + f(0) =: g_0 \in D((-A)^{\varphi})$, $Re\varphi \in (3-\alpha-2\beta, \alpha\mu+\alpha-1)$. *Allora* $\forall Re\gamma \in (1-\beta, \alpha+\beta+Re\varphi-2)$ *e* $\delta \in (0, \frac{\alpha+\beta-Re\gamma-Re\varphi-2}{\alpha})$ *il problema (5) ha una unica soluzione classica* v *tale che* $u = Mv \in C^{1+\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$. *Inoltre si ha* $D_t u = D_t M v$ *come nel teorema 8.2.*

Come applicazione, includiamo

$$\begin{aligned}
&D_t(m(x)v(t,x)) = L(x,D_x)v(t,x) + f(t,x),\ (t,x) \in (0,T] \times \Omega,\ (*)\\
&v(t,x) = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega,\ m(x)v(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega,\\
&L(x,D_x) = \textstyle\sum_{i,j=i}^{n} D_{x_i}(a_{ij}(x)D_{x_i} - a_0(x))
\end{aligned}$$

$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\Omega)$, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ regolare, $a_0 \in C(\bar{\Omega})$, $a_0(x) \geq \nu_1 > 0$

$$\nu_2|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu_3|\xi|^2,\ \forall (x,\xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$$

$X = L^q(\Omega)$, $q \in (1,+\infty)$, $D(L) = W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, $Lu = L(u,D)u$ M é l'operatore di moltiplicazione per $m(x)$ in $L^q(\Omega)$; si vede, cfr. Favini e Yagi [6], [7], Favaron [3], Favaron-Favini [4] che

$$\|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{L(X)} \leq c(1+|\lambda|)^{-\frac{1}{q}},\ \forall \lambda \in \Sigma_1$$

$\Sigma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda > -c(1+|Im\lambda|)\}$, $c > 0$.

Perció (H2) é soddisfatta in $(\alpha,\beta) = (1,\frac{1}{q})$. La condizione $\beta \in (\frac{1}{2},1]$ porta a $q \in (1,2)$. Se $q \in (1,2)$ e q' é il coniugato di q, deduciamo che se $f \in C^{\mu}([0,T];X)$, $\mu \in (\frac{2}{q'},1)$, $u_0 = mv_0 \in D(A)$ con $v_0 \in D(L)$ e $Lv_0 + f(0) = g_0 \in D((-A)^{\varphi})$, $Re\varphi \in (\frac{2}{q'},\mu)$, allora per ogni $Re\gamma \in (\frac{1}{q'}, Re\varphi - \frac{1}{q'})$, $\delta \in (0, -Re\gamma + Re\varphi - \frac{1}{q'})$ il problema (*) ha una unica soluzione classica u tale che $mv \in C^{1+\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$ e

$$\|D_t(mv)\|_{\delta,T;D((-A)^{\gamma})} \leq C(T)\|g_0\|_{D((-A)^{\varphi})} + T^{\mu - Re\gamma - \delta - \frac{1}{q'}} C_1(T)|f|_{\mu,T;X}.$$

Valori maggiori di q si possono prendere se m é anche piú regolare e con un certo ordine di annulamento su $\bar{\Omega}$: $m \in C^1(\bar{\Omega})$ e

$$|\nabla m(x)| \leq k[m(x)]^{\delta},\ x \in \bar{\Omega}.$$

Come altro esempio, prendiamo l'equazione in $X = L^2(\Omega)$, Ω come prima,

$$(**) \begin{cases} D_t(u(t,x)) = \Delta_x\{a(x)u(t,x)\} + f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ a(x)u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

$a \in L^+\infty(\Omega)$ a valori reali, $a > 0$ q.d. in Ω. Posto $v(t,x) = a(x)u(t,x)$, (**) si trasforma in (*) con $m(x) = \frac{1}{a(x)}$, $L = \Delta_x$ con Dirichelet condizioni al bordo. Se

$$m = \frac{1}{a} \in \begin{cases} L^r(\Omega), & \text{per un } r \geq 2 \quad \text{quando } n = 1, \\ L^r(\Omega), & \text{per un } r > 2 \quad \text{se } n = 2, \\ L^r(\Omega), & \text{per un } r \geq n \quad \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

allora (cfr. Favini e Yagi [7], Favaron [3, p. 270])

$$\|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-[1 - \frac{n}{2r}]}\ \forall \lambda \in \Sigma_1$$

si puó prendere $(\alpha, \beta) = (1, 1 - \frac{n}{2r})$ e $\beta \in (1/2, 1]$ implica $r > n$ se $n \geq 3$. Deduciamo che se $f \in C^{\mu}([0,T]; X)$ $D(L) := W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mu \in (n/r, 1)$, $u_0 = mv_0 \in D(A)$ dove $v_0 \in D(L)$, $f(0) + Lv_0 = g_0 \in D((-A)^{\varphi})$, $Re\varphi \in (n/r, \mu)$, allora per ogni $Re\gamma \in (n/(2r), Re\varphi - n/(2r)]$ e $\delta \in (0, -Re\gamma + Re\varphi - n/(2r))$ il problema (**) ha una unica soluzione classica $u \in C^{1+\delta}([0,T]; D((-A)^{\gamma}))$.

9. Problemi aperti

Un problema molto interessante riguarda l'equazione nonlineare

$$D_t u(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)),\ u(0) = u_0$$

Nel caso single valued, vedi Periago [17], Periago e Straub [18].

Ci sono recentissimi risultati di Favini, Lorenzi, Tanabe relativi a un caso concreto di equazioni alle derivate parziali del tipo suddetto e termine integrale.

References

[1] El Hachem Alarabiou, Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'oprateurs linaires multivoques non ngatifs, Comptes rendus de l'Acadmie des sciences. Srie 1, Mathmatique, (1991), vol. 313, no4, pp. 163-166

[2] R. Cross, "Multivalued Linear Operators", M. Dekker, Inc., 1998.

[3] A. Favaron, Optimal time and space regularity for solutions of degenerate differential equations , Central European Journal of Mathematics Volume 7, Number 2, 249-271.

[4] A. Favaron, A. Favini, Maximal time regularity for degenerate evolution integro-differential equations, Journal of Evolution Equations Volume 10, Number 2, 377-412.

[5] A. Favaron, A. Favini, Fractional powers and interpolation theory for multivalued linear operators and applications to degenerate differential equations, In corso di stampa su Tsukuba Journal of Mathematics.

[6] A. Favini, A. Yagi, Multivalued linear operators and degenerate evolution equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 163 (1993) 353-384.

[7] A. Favini, A. Yagi, "Degenerate Differential Equations in Banach Spaces", Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[8] A. Favini, A. Yagi, Quasilinear degenerate evolution equations in Banach spaces, J. Evol. Eqs. 4 (2004), 421-449.

[9] P. Grisvard, Commutativé de deux foncterurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures et Appl., 45 (1966), 143-290.

[10] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Volume 840, 1981.

[11] H. Komatsu, Fractional powers of operators, Pacific J. Math. 19 (1966), 285-346.

[12] H. Komatsu, Fractional powers of operators, II, Interpolation spaces, Pacific Journal of Mathematics, volume 21, issue 1, (1967), pp. 89-111.

[13] H. Komatsu, Fractional powers of operators, VI, Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 19 (1972), 1-63.

[14] A. Lunardi, "Analytic semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems", Birkhäuser-Verlay, Boston, 1995.

[15] I. V. Melnikova, The Cauchy Problem for a Differential Inclusion in Banach Spaces and Distribution Spaces, Siberian Mathematical Journal, Volume 42, Number 4, 751-765.

[16] K. Taira, The theory of semigroups with weak singularity and its applications to partial differential equations, Tsukuba J. Math., 13, 2, (1989), 513-562.

[17] F. Periago, Global existence, uniqueness, and continuous dependence for a semilinear initial value problem, J. Math. Anal. Appl., 280, 2 (2003), 413423.

[18] [9] F. Periago,B. Straub, A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations, J. Evol. Equ., 2, 1 (2002), 4168.

[19] Hans Triebel, Interpolation theory, function spaces, differential operators, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1978).

[20] W. von Wahl, Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Raumen holderstetiger Funktionen, Nachr. Akad. Wiss. Gttingen Math.-Phys. Kl. II, (1972), 231258.

[21] W. von Wahl, Neue Resolventenabschtzungen fr elliptische Differentialoperatoren und semilineare parabolische Gleichungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, (1977), 46, 179204.

[22] C. Wild, Semi-groupes de croissance $\alpha < 1$ holomorphes, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B, (1977), 285, A437A440.

[23] Yagi A., Fractional powers of operators and evolution equations of parabolic type, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 64, Number 7 (1988), 227-230.

[24] Yagi A., Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators, Osaka J. Math., (1991), 28, 385410.