Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2009-10

Giovanni Cupini

Sull'equazione $\det \nabla u = f$ senza ipotesi di segno

17 giugno 2010

Abstract

We consider the nonlinear problem

$$\begin{cases} \det \nabla u\left(x\right) = f\left(x\right) & x \in \Omega \\ \\ u\left(x\right) = x & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where $k \geq 1$ is an integer, Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^n$ and $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfies

$$\int_\Omega f\left(x\right) dx = \operatorname{meas} \Omega.$$

The positivity of f is a standard assumption in the literature. In a recent joint paper with B.Dacorogna and O.Kneuss (EPFL) we prove the existence of a solution $u \in C^k\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ with no assumptions on the sign of f. Here we state this theorem together with some related results and we outline the main features of the problem.

1. Il problema

Vogliamo illustrare alcuni aspetti del problema dell'esistenza e regolarità di soluzioni classiche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ di

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\det \nabla u\,(x) = f\,(x) & x \in \Omega \\[2ex]
u\,(x) = x & x \in \partial\Omega
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

dove Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gode di opportune proprietà di regolarità.

Il problema è stato studiato sotto diversi aspetti (esistenza, regolarità, soluzioni deboli) in varie pubblicazioni e da vari autori, assumendo l'ipotesi $f \geq c > 0$. In tal caso esso è equivalente al problema di trovare una funzione u di classe C^1, $u : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, che coincida con l'identità sul bordo e che trasformi la misura di Lebesgue $dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ nella misura $f(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, cioè sia tale che $\mathrm{m}(u(E)) = \int_E f(x)\,dx$ per ogni E misurabile. Usando il linguaggio della geometria differenziale, ciò significa trovare una u tale che

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
u^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_n) = f(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n & \mathrm{in}\,\Omega \\
u(x) = x & \mathrm{su}\,\partial\Omega.
\end{array}
\right.
$$

Il problema (1), già interessante di per sè, rende possibile la dimostrazione dell'esistenza di minimi di problemi variazionali policonvessi (si vedano Dacorogna (1981) [8], Mascolo (1991) [15] e Cupini-Mascolo (2005) [7]) e non policonvessi (v.Mascolo-Schianchi (1983) [16], Cellina-Zagatti (1995) [5] e, di nuovo, [7]) tipici della teoria dell'elasticità non lineare; un esempio, tratto da [10], è riportato in Appendice A.1 in fondo a queste note. Si vedano, inoltre, Odgen (1972) [19], Marcellini (1989) [14] e [8] dove è data un'applicazione al problema dell'equilibrio dei gas.

Uno dei primi fondamentali risultati nella teoria del problema (1) è di Moser (1965) [18]. Egli dimostra che data una varietà riemanniana M compatta e date due sue forme volume τ, σ, di classe C^∞, positive, con stessa massa totale, cioè tali che $\int_M \tau = \int_M \sigma$, allora esiste un C^∞-diffeomorfismo u su M tale che $\sigma = u^*\tau$ e

$$
\int_{u(S)} \tau = \int_S \sigma \qquad \text{per ogni } S \subset M.
$$

Tale risultato è stato generalizzato da Banyaga (1974) [3] alle varietà con bordo. Altri contributi alla teoria sono stati dati da Reimann (1972) [21], Zehnder (1976) [26], Tartar (1978) [23] e Dacorogna (1981) [8]. È finalmente grazie ai risultati di Dacorogna-Moser (1990) in [9] che si ha un quadro chiaro, sia per l'esistenza che per la regolarità, del problema (1) con $f > 0$. In particolare, si dimostra che se $f \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, allora esiste una soluzione u in $\mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ diomostrando così la regolarità ottimale. Prima di enunciare questo teorema osserviamo che è facile dimostrare che

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \mathrm{mis}(\Omega) \tag{2}$$

è condizione necessaria per avere soluzioni di (1). D'ora in poi ci riferiremo ad essa come *condizione di compatibilità per* (1).

Teorema 1.1 (Dacorogna-Moser (1990) [9])**.** *Sia* $k \geq 0$ *un intero e sia* $0 < \alpha < 1$. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *un aperto connesso con bordo* $C^{k+3,\alpha}$ *e* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, *con* $f > 0$.
Se $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e vale* (2), *allora il problema* (1) *ammette soluzione* $u \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Viceversa, se (1) *ammette soluzione* $u \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *allora* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e vale* (2).

Notiamo che la dimostrazione di questo teorema non fa uso del metodo del flusso già utilizzato da Moser in [18], dato che esso non darebbe la maggior integrabilità della soluzione, bensì verte su un argomento di punto fisso, che dà l'esistenza di una soluzione sotto un'ipotesi di piccolezza della norma hölderiana di $f-1$. È poi possibile rimuovere tale ipotesi, ad esempio utilizzando un ragionamento di iterazione. Per i dettagli rimandiamo il lettore, oltre che all'articolo originale, alle pagine ad esso dedicate nella monografia [10]. Si veda l'Appendice A.2 per un corollario del Teorema 1.1.

Osserviamo che (1) è un caso particolare del seguente problema

$$\begin{cases} g(u(x))\det\nabla u\,(x) = f\,(x) & x \in \Omega \\ u\,(x) = x & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g > 0$.
In questo caso più generale (3) la condizione di compatibilità diventa

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,dx. \tag{4}$$

Se $f > 0$ allora deve essere $g > 0$ in $\overline{\Omega}$ per potere avere soluzioni C^1 di (3). Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2. *Siano $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $f > 0$ e $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Affinché ci sia soluzione (in senso classico: C^1) di (3) deve essere $g > 0$ in $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. La condizione di compatibilità $\int_\Omega g = \int_\Omega f > 0$ obbliga g ad essere positiva in qualche regione di Ω.

Supponiamo per assurdo che sia $g^{-1}(0) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$. Allora $\exists\, y \in \overline{\Omega} \ : \ g(y) = 0$. Vale la seguente catena di implicazioni:

$$u \text{ soluzione} \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{id} \ \text{ su } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u(\overline{\Omega}) \supseteq \overline{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \exists\, z \in \overline{\Omega} \ : \ y = u(z).$$

Quindi

$$\exists\, z \in \overline{\Omega} \quad : \quad \begin{cases} u(z) \in \overline{\Omega} \\ g(u(z)) = 0 \end{cases}$$

ottenendo così $0 = g(u(z)) \det \nabla u\,(z) = f\,(z) > 0$ che è un assurdo. Dunque deve essere $g > 0$ in $\overline{\Omega}$. □

Osserviamo anche che quando $f > 0$ sapere risolvere (1) implica saper risolvere (3) (il viceversa è ovvio).

Teorema 1.3. *Siano $f, g \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $f, g > 0$, soddisfacenti (4). Allora esiste $u \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega})$ soluzione di*

$$\begin{cases} g(u(x)) \det \nabla u(x) = f(x) & in\, \Omega \\ u(x) = x & su\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.1 esistono v, $w \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega})$ tali che

$$\begin{cases} \det \nabla w\,(x) = \dfrac{f\,(x)\,\mathrm{mis}(\Omega)}{\int_\Omega f} & \text{in}\, \Omega \\[2ex] \det \nabla v\,(x) = \dfrac{g\,(x)\,\mathrm{mis}(\Omega)}{\int_\Omega g} & \text{in}\, \Omega \\[2ex] w = v = \mathrm{id} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u = v^{-1} \circ w$ risolve

$$\begin{cases} g(u(x)) \det \nabla u\,(x) = f\,(x) & \text{in}\,\Omega \\ \qquad\qquad u = \mathrm{id} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\square$

Un quesito che ci si può porre riguarda la *unicità* o meno delle soluzioni di (1) (analogamente per (3)). Nel caso $n = 1$, f continua, la soluzione è chiaramente unica. Ad esempio, se $\Omega = (-1, 1)$ e $f \in C([-1, 1])$ allora $u(x) = -1 + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ è l'unica soluzione. Ciò non è più vero in dimensioni superiori ($n \geq 2$) e questo aspetto accomuna sia il caso $f > 0$ che quello di f senza segno.
Già nel caso più semplice: $n = 2$, $f = 1$ e $\Omega = B_1$ (palla unitaria centrata nell'origine), usando le coordinate polari si ha che

$$u_k(x) = u_k(x_1, x_2) = (r\cos(\theta + 2k\pi r^2), r\sin(\theta + 2k\pi r^2)), \qquad r \in [0, 1]$$

è soluzione di (1) per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Più in generale, se $f > 0$ non dovesse coincidere con la funzione costante 1, consideriamo

$$\mathcal{D} = \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,:\, \det \nabla u \equiv 1, u|_{\partial\Omega} = \mathrm{id}\}.$$

Esso è un gruppo di Lie di dimensione infinita per $n \geq 2$ e se v risolve (1) con $f > 0$ e $u \in \mathcal{D}$ allora anche $u \circ v$ è soluzione, dato che

$$\det \nabla(u \circ v)(x) = \det \nabla u(v(x)) \cdot \det \nabla v(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Ovviamente il dato al bordo è rispettato: $(u \circ v)(x) = x$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Altri risultati in letteratura, tutti riguardanti il caso $f > 0$, prendono in esame, in particolare, il caso di f poco regolare (si veda la sezione 4). Qua ci limitiamo a citare il seguente risultato dovuto a Ye (1994) [24] nell'ambito degli spazi di Sobolev: *se* $f \in W^{m,p}(\Omega)$*, con* $\max\{1, \frac{n}{m}\} < p < \infty$*, allora* $u \in W^{m+1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Notiamo che gli esponenti di integrabilità sono scelti in modo da godere di opportune e convenienti immersioni in spazi di Hölder.

Segnaliamo infine il risultato di Giannetti-Pisante (2009) [12] in cui anziché considerare la funzione determinante si considera una generica funzione quasi affine. Il risultato ottenuto richiede tuttavia ipotesi più restrittive su f.

La novità del recente articolo [6] di C.-Dacorogna-Kneuss (2009) rispetto ai risultati noti in letteratura è l'assenza dell'ipotesi di positività di f. Come già messo in evidenza da Ye (2003) in [25] [1] non ipotizzare $f > 0$ comporta difficoltà aggiuntive:

- a differenza del caso $f > 0$ può essere $u(\overline{\Omega}) \supsetneq \overline{\Omega}$
- le dimostrazioni note per risultati aventi come ipotesi $f > 0$ non sono adattabili a f senza segno
- non è chiaro quale sia la regolarità ottimale per la soluzione.

Il principale risultato che vogliamo descrivere in queste note è il seguente:

Teorema 1.4 (C.-Dacorogna-Kneuss (2009) [6])**.** *Sia $k \geq 1$ un intero e sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con $\overline{\Omega}$ $(k+1)$-diffeomorfo a $\overline{B_1}$. Sia $f \in C^k(\overline{\Omega})$ tale che $\int_\Omega f = \mathrm{mis}(\Omega)$. Allora esiste $u \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ soluzione tale che*

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = \mathrm{id} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rimandiamo al paragrafo 3 per un enunciato più generale. Segnaliamo al lettore anche i recenti risultati in [1] e [2] sull'esistenza di diffeomorfismi φ tali che $\varphi^*(g) = f$, dove f e g sono k-forme differenziali chiuse, ricordando che se $k = n$ allora tale problema è legato a quello considerato in queste note.

2. IL CASO DI f SENZA IPOTESI DI SEGNO: $n = 1$

Molte differenze tra il caso $f > 0$ e il caso generale di f senza ipotesi di segno emergono, in parte, già nel caso unidimensionale, pur nella sua semplicità.

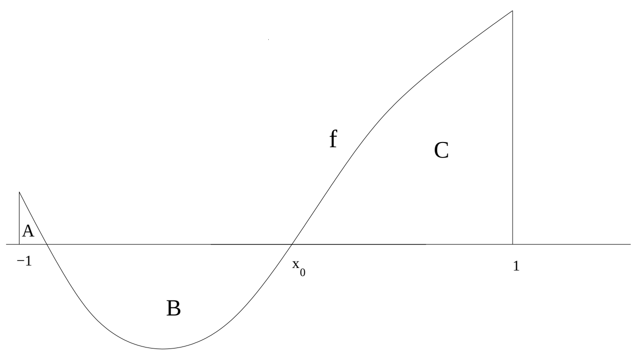
[1] *"Dans le méthode du flot ou dans la méthode constructive [due metodi per determinare una soluzione di (1) per $f \geq c > 0$], on peut remarquer l'importance du fait que $f \geq c > 0$, et il n'existe pour l'instant pas de résultat général quand f change de signe, ou tout simplement quand f s'annule sur une partie de Ω. Dans le premier cas, u sera obligé de sortir du domain Ω, ce qui rend l'étude très difficile; dans le deuxième cas, on risque d'avoir une chute spectaculaire de la régularité générale de solution u, comme ce qui se passe pour l'équation de Monge-Ampère."*

Consideriamo qui il problema (1), supponendo $\Omega = (-1, 1)$.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) & \text{in (-1,1)} \\ u(-1) = -1, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Se $f \in C^0([-1,1])$ e vale la condizione di compatibilità $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ allora, come detto, c'è una unica soluzione: $u(x) = -1 + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

Supponiamo ora che f non abbia segno costante, pur essendo positiva agli estremi di $[-1,1]$ e che il suo grafico sia come in fig.1.



Allora si verifica che

$$u(x_0) = -1 + \int_{-1}^{x_0} f(t)\,dt = -1 + \text{mis}\,A - \text{mis}\,B < -1.$$

Quindi $u([-1,1]) \supsetneq [-1,1]$. Ciò ovviamente non capiterebbe se $f \geq 0$.
Inoltre, è certo che $u([-1,1])$ esce dal dominio $[-1,1]$ se $f(-1) < 0$ oppure $f(1) < 0$.

Riassumendo:

Se $f \in C^0([-1,1])$ e $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ allora

- esiste una unica soluzione: $u(x) = -1 + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$
- $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u([-1,1]) = [-1,1]$
- $f(-1) < 0$ opp. $f(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad u([-1,1]) \supsetneq [-1,1]$
- $f(-1),\, f(1) > 0 \quad \not\Rightarrow \quad u([-1,1]) = [-1,1]$.

3. Il caso di f senza ipotesi di segno: $n \geq 2$

Il principale risultato ottenuto in [6] è il seguente:

Teorema 3.1 (C.-Dacorogna-Kneuss (2009) [6])**.** *Sia $k \geq 1$ un intero e sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con $\overline{\Omega}$ $(k+1)$-diffeomorfo a $\overline{B_1}$. Siano $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^k(\overline{\Omega})$ tali che*

$$g > 0 \quad e \quad \int_\Omega f = \int_\Omega g.$$

Allora esiste $u \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} g(u(x)) \det \nabla u(x) = f(x) & in\ \Omega \\ u = \mathrm{id} & su\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Inoltre, se $\operatorname{supp}(g - f) \subset \Omega$, *allora u può essere scelto tale che* $\operatorname{supp}(u - \mathrm{id}) \subset \Omega$.

Facciamo ora qualche commento e osservazione sul teorema precedente, anche ricordando quanto detto a proposito della non unicità della soluzione e di quanto avviene nel caso unidimensionale.

- Il risultato sopra continua a valere se $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$. In tal caso $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. A differenza del Teorema 1.1, in Teorema 3.1 non si ha un incremento di regolarità e la questione se sia possibile ottenerlo è tuttora aperta.
- Se $f \geq 0$ in Ω allora esiste una soluzione $u \in C^k(\overline{\Omega}; \overline{\Omega})$ di (3). Ciò è analogo al caso unidimensionale, dove l'unica soluzione è tale che l'immagine di u non esce dal dominio quando il dato è non negativo. Tuttavia se esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$ allora u non può essere un diffeomorfismo, dato che $\det \nabla u(x) = \frac{f(x)}{g(u(x))} = 0$.
- Se $f > 0$ in $\partial\Omega$ è possibile scegliere una soluzione u di (3) tale che $u(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. Ciò è diverso da quanto succede nel caso unidimensionale (si ricordi la fig.1), ma nel caso unidimensionale la soluzione è unica, a differenza delle infinite soluzioni del caso $n \geq 2$.
- Se $f \geq 0$ e $f^{-1}(0) \cap \Omega$ è numerabile, allora si può scegliere una soluzione $u \in C^k(\overline{\Omega}; \overline{\Omega})$ di (3) che sia anche in $\mathrm{Hom}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega})$. Tuttavia come già detto sopra, non sarà un diffeomorfismo.
- Se $f(x) < 0$ per qualche $x \in \partial\Omega$, allora $u(\overline{\Omega}) \supsetneq \overline{\Omega}$.

- La versione dell'enunciato apparso in [6] faceva la richiesta $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) > 0$. Essa è stata successivamente indebolita con la richiesta $g > 0$ dal terzo autore in [13].
- Successivamente alla pubblicazione dell'articolo, Kenuss in [13] ottiene il seguente risultato di stabiltà che enunciamo per semplicità per $\Omega = B_1(0)$.

  Nelle ipotesi del Teorema 3.1, supponiamo che $\Omega = B_1(0)$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare una soluzione u tale che $u(\overline{B_1(0)}) \subseteq B_{1+\epsilon}(0)$.
- Abbiamo affermato in Teorema 1.3 che se $f > 0$ saper risolvere (1) implica saper risolvere (3). L'avevamo dimostrato definendo $u = v^{-1} \circ w$, con w e v tali che

$$\begin{cases} \det \nabla w\,(x) = \dfrac{f\,(x)\,\mathrm{mis}(\Omega)}{\int_\Omega f} & \text{in}\,\Omega \\ \det \nabla v\,(x) = \dfrac{g\,(x)\,\mathrm{mis}(\Omega)}{\int_\Omega g} & \text{in}\,\Omega \\ w = v = \mathrm{id} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

  Tale ragionamento non è riproducibile nel caso di f senza segno. Infatti abbiamo che $v(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$, ma potrebbe essere $w(\overline{\Omega}) \supsetneq \overline{\Omega}$ e così $u = v^{-1} \circ w$ non sarebbe ben definita.

Diamo ora uno schema della dimostrazione del Teorema 3.1. Per semplicità, ci limitiamo a considerare il caso $g = 1$ (quindi il problema (1), anziché il (3)) e per Ω prendiamo la palla unitaria n-dimensionale $B_1(0)$, d'ora in poi indicata con B.

Se $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^n)$ e $x \in \overline{B}$, indicheremo, come in geometria differenziale,

$$u^*(g)(x) := g(u(x)) \det \nabla u(x).$$

Ricordiamo che

$$(u_1 \circ u_2)^* = u_2^* \circ u_1^*.$$

I passi della dimostrazione sono sostanzialmente tre.

Passo 1 (integrazione radiale positiva). Esiste $u_1 \in \mathrm{Diff}^\infty(\overline{B}; \overline{B})$ tale che

$$u_1^*(f)(0) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{supp}(u_1 - \mathrm{id}) \subset B$$

con

$$\int_0^r s^{n-1} u_1^*(f)(s\frac{x}{|x|})ds > 0, \quad \text{per ogni } x \neq 0 \text{ e } r \in (0,1]. \tag{5}$$

Notiamo che

$$\int_B u_1^*(f)(x)\,dx = \int_B f(u_1(x)) \det \nabla u_1(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx = \mathrm{mis}(B).$$

Passo 2. Esiste $u_2 \in C^k(\overline{B};\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} \det \nabla u_2 = u_1^*(f) & \text{in } B \\ u_2 = \mathrm{id} & \text{su } \partial B\,. \end{cases}$$

Ciò è possibile dal momento che vale la condizione di compatibilità

$$\int_B u_1^*(f) = \int_B f = \mathrm{mis}(B)$$

e vale (5).

Passo 3 (conclusione). Dai passi precedenti abbiamo che

$$u := u_2 \circ (u_1)^{-1} \in C^k(\overline{B};\mathbb{R}^n)$$

soddisfa

$$\begin{cases} \det \nabla u = f & \text{in } B \\ u = \mathrm{id} & \text{su } \partial B \end{cases}$$

essendo

$$\begin{aligned} \det \nabla u &= \det \nabla u_2((u_1)^{-1}) \det \nabla (u_1)^{-1} = \left\{[u_1^*(f)]\,(u_1)^{-1}\right\} \det \left(\nabla (u_1)^{-1}\right) \\ &= \left[(u_1)^{-1}\right]^* \circ u_1^*\,(f) = f. \end{aligned}$$

4. Soluzioni deboli

In [20] Oxtoby e Ulam dimostrano che se Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq c > 0$ e vale (2), allora esiste un omeomorfismo u di $\overline{\Omega}$ tale che

$$\begin{cases} \mathrm{mis}(u(E)) = \int_E f(x)\,dx & \forall\, E \subset \Omega \text{ aperto} \\ u(x) = x & \text{su}\, \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Quando $f \geq c > 0$ una applicazione u che soddisfa (6) viene detta soluzione debole di (1) e se u è C^1 allora soluzioni deboli e soluzioni in senso classico coincidono.

Nell'articolo di Rivière-Ye (1996) [22] si dimostra che se $f \in C^0$ soddisfa la condiziione di compatibilità allora esiste una soluzione debole u, tale che $u, u^{-1} \in \cap_{\alpha<1} C^{0,\alpha}$. In breve:

$$f \in C^0(\overline{\Omega}),\ f > 0 \qquad \Rightarrow \qquad u, u^{-1} \in \cap_{\alpha<1} C^{0,\alpha}$$

A questo punto, sorge spontanea la domanda se è possibile arrivare a soluzioni bi-Lipschitziane. La risposta è negativa, come risulta da due esempi ottenuti indipendentemente da Burago-Kleiner [4] e Mc Mullen [17] nel 1998: $f \in C^0 \not\Rightarrow u, u^{-1} \in C^{0,1}$.

Si noti che quando $f \in L^\infty$, $f \geq c > 0$, con la condizione (2) soddisfatta, allora esiste una soluzione debole hölderiana (v.[22]).

Esaminiamo che cosa si può affermare quando f non è positiva. Ben sappiamo da quanto affermato precedentemente che potrebbe essere $u \notin \mathrm{Hom}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$. Allora, in tal caso la giusta definizione di soluzione debole non è (6), bensì

$$\int_E f\,(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\deg(u, E, y)dy$$

dove deg è il grado topologico (si veda ad es. [11] pag. 106).

Vale il seguente:

Lemma 4.1 ([6]). *Supponiamo che $g, f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u \in C^1(\overline{\Omega};\overline{\Omega}) \cap \mathrm{Hom}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$. Allora u è soluzione classica di* (3) *se e solo se u è soluzione debole di* (3).

Inoltre,

Proposizione 4.1 ([6]). *(i) Siano $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ tali che $f > 0$, $\quad g \geq 0 \quad$ e $\quad \int_\Omega f = \int_\Omega g$. Se $\mathrm{int}(g^{-1}(0) \cap \Omega) \neq \emptyset$ allora non ci sono soluzioni deboli di* (3).

(ii) Sia $\overline{\Omega}$ C^2-diffeomorfo a $\overline{B_1}$ e siano $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che

$$f > 0, \quad g \geq 0, \quad g^{-1}(0) \cap \Omega \text{ è numerabile} \quad \text{e} \quad \int_\Omega f = \int_\Omega g.$$

Allora esiste una soluzione debole di (3).

Appendice A

A.1. **Applicazione a problemi policonvessi.** Quando $f > 0$ i risultati di esistenza per il problema (1) possono essere utilizzati per dimostrare l'esistenza di minimi di problemi variazionali tipici in problemi di elasticità non lineare. Nei casi più semplici la densità d'energia è del tipo $F(\nabla u) = g(\det \nabla u(x))$ dove g è convessa; in tal caso F si dice policonvessa. Qui sotto ne riportiamo un esempio (si veda [10]). Ulteriori applicazioni a problemi analoghi sono, ad esempio, in Mascolo-Schianchi (1983) [16] e C.-Mascolo (2005) [7].

Teorema A.1 (Corollario 14.9 in [10])**.** *Sia $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Siano $\Omega, O \subset \mathbb{R}^n$ aperti connessi limitati con bordo $\partial C^{k+3,\alpha}$. Sia $u_0 \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O})$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, tale che* $\det Du_0(x) > 0$ *in* $\overline{\Omega}$.

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa allora il problema di minimo

$$\min \left\{ I(u) = \int_\Omega g(\det \nabla u(x))\, dx \;:\; u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \right\} \tag{7}$$

ha una soluzione $u \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O})$.

Dimostrazione. Sia $f : \overline{O} \to \mathbb{R}$

$$f(y) = \det \nabla u_0^{-1}(y) \fint_\Omega \det \nabla u_0(z)\, dz \;> 0.$$

Vale che $f > 0$ e $\int_O f = \operatorname{mis} O$.

Per il Teorema 1.1

$$\exists\, v \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O}) \;:\; \begin{cases} \det \nabla v\,(y) = f\,(y) & \text{in}\, O \\ v = \mathrm{id} & \text{su } \partial O. \end{cases}$$

Definiamo $\bar{u} = v \circ u_0$. Tale funzione risolve

$$\begin{cases} \det \nabla \bar{u}(x) = \fint_\Omega \det \nabla u_0(z)\, dz & \text{in}\, \Omega \\ \bar{u} = u_0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Infatti $\det \nabla \bar{u}(x) = \det \nabla v(u_0(x)) \det \nabla u_0(x) = f(u_0(x)) \det \nabla u_0(x) = \det \nabla u_0^{-1}(u_0(x)) \;\cdot$ $\fint_\Omega \det \nabla u_0(z)\, dz \;\cdot\; \det \nabla u_0(x) = \fint_\Omega \det \nabla u_0(z)\, dz$. Quindi, per ogni $u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega)$

$$\begin{aligned} I(u) = \int_\Omega g\left(\det \nabla u(z)\right)\, dz \;&\geq\; \operatorname{mis} \Omega\; g\left(\fint_\Omega \det \nabla u(z)\, dz \right) \\ &= \operatorname{mis} \Omega\; g\left(\fint_\Omega \det \nabla u_0(z)\, dz \right) = \operatorname{mis} \Omega\; g\left(\det \nabla \bar{u}(x)\right) \\ &= \int_\Omega g\left(\det \nabla \bar{u}(y)\right)\, dy = I(\bar{u}) \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Jensen. □

A.2. **Corollario al Teorema 1.1.** Dal Teorema 1.1 segue facilmente il seguente risultato.

Corollario A.1 ([9])**.** *Sia* $u_0 \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. *Allora esiste* $u \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$ *soluzione di*

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = 1 & \mathit{in}\, \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \mathit{su}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dal momento che $\det \nabla u_0^{-1} \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, per il Teorema 1.1 esiste $v \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \det \nabla v(x) = \det \nabla u_0^{-1}(x) & \mathrm{in}\, \Omega \\ v(x) = x & \mathrm{su}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u := v \circ u_0$ risolve

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = \det \nabla v(u_0(x))\, \det \nabla u_0(x) = 1 & \mathrm{in}\, \Omega \\ u(x) = v(u_0(x)) = u_0(x) & \mathrm{su}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

□

Riferimenti bibliografici

[1] S. Bandyopadhyay, B. Dacorogna. *On the pullback equation* $\varphi^*(g) = f$. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009) 1717-1741.

[2] S. Bandyopadhyay, B. Dacorogna, O. Kneuss. *The pullback equation for degenerate forms.* Discrete Contin. Dyn. Syst. **27** (2010), 657-691.

[3] A. Banyaga. *Formes-volume sur les variétés à bord.* Enseignement Math. **20** (1974) 127-131.

[4] D. Burago, B. Kleiner. *Separated nets in Euclidean space and Jacobian of biLipschitz maps. Geom. Funct. Anal.* **8** (1998) 273-282.

[5] A. Cellina, S. Zagatti. *An existence result in a problem of the vectorial case of the calculus of variations.* SIAM J. Control Optim. **33** (1995) 960–970.

[6] G. Cupini, B. Dacorogna, O. Kneuss. *On the equation* $\det \nabla u = f$ *with no sign hypothesis.* Calc.Var. Partial Differential Equations **36** (2009) 251-283.

[7] G. Cupini, E. Mascolo. *Existence of minimizers for polyconvex and nonpolyconvex problems.* SIAM J. Control Optim. **44** (2005) 1370–1390.

[8] B. Dacorogna. *A relaxation theorem and its applications to the equilibrium of gases.* Arch. Rational Mech. Anal. **77** (1981) 359-386.

[9] B. Dacorogna, J. Moser. *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7** (1990) 1-26.

[10] B. Dacorogna. Direct methods in the Calculus of Variations, Applied Mathematical Sciences 78, 2nd ed., Springer, New York, (2008).

[11] I. Fonseca, W. Gangbo. Degree theory in analysis and applications, Oxford University Press, New York, 1995.

[12] F. Giannetti, G. Pisante. *Existence of solutions for some quasiaffine PDEs.* Z. Anal. Anwend. **28** (2009) 47-56.

[13] O. Kneuss. Tesi di dottorato (in preparazione).

[14] P. Marcellini. The stored-energy for some discontinuous deformations in nonlinear elasticity, Partial differential equations and the calculus of variations, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Boston, 1989, 767–786.

[15] E. Mascolo. *Existence results for a class of noncoercive polyconvex integrals.* B.U.M.I. **5-A** (1991) 97–107.

[16] E. Mascolo, R. Schianchi. *Existence theorems for non convex problems.* J. Math. Pures Appl. **62** (1983) 349–359.

[17] C. T. Mc Mullen. *Lipschitz maps and nets in Euclidean space.* Geom. Funct. Anal. **8** (1998) 304-314.

[18] J. Moser. *On the volume elements on a manifold.* Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286-294.

[19] R. W. Odgen. *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids.* Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **328** (1972) 567–583.

[20] J. C. Oxtoby, S. M. Ulam. *Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity.* Ann. of Math. **42** (1941) 874-920.

[21] H. M. Reimann. *Harmonische Funktionen und Jacobi-Determinanten von Diffeomorphismen.* Comment. Math. Helv. **47** (1972) 397-408.

[22] T. Rivière, D. Ye. *Resolutions of the prescribed volume form equation.* NoDEA. Nonlinear Differential Equations Appl. **3** (1996) 323-369.

[23] L. Tartar. Unpublished, 1978.

[24] D. Ye. *Prescribing the Jacobian determinant in Sobolev spaces.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **11** (1994) 275-296.

[25] D. Ye. Prescription de la forme volume. Séminaire: Équations aux Dérivées Partielles, 2002-2003, Exp.no.XV, École Polytech., Palaiseau, 2003.

[26] E. Zehnder. *Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms.* Lecture Notes in Mathematics **597**, Springer-Verlag, Berlin, 1976 828-855.