Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2009-10

Andrea Bonfiglioli

I Teoremi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin. Storia, Prove, Problemi Aperti.

20 maggio 2010

Abstract

The aim of this lecture is to provide an overview of facts and references about past and recent results on the Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin (shortcut as the CBHD Theorem), following the recent preprint monograph [13]. In particular, we shall give sketches of the following facts: A historical *précis* of the early proofs (see also [1]); the statement of the CBHD Theorem as usually given in Algebra and that employed in the Analysis of linear PDE's; a review of proofs of the CBHD Theorem (as given by: Bourbaki; Hausdorff; Dynkin; Varadarajan) together with a unifying demonstrational approach; an application to the Third Theorem of Lie (in local form). Some new results will be also commented: The intertwinement of the CBHD Theorem with the Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt and with the free Lie algebras (see [12]); recent results on optimal domains of convergence.

Alcuni dei risultati di seguito trattati sono stati ottenuti in collaborazione con R. Achilles [1] *e con R. Fulci* [12, 13]*; altri sono contenuti in* [10, 11]

(si veda anche B., Lanconelli, Uguzzoni [16, Chapter 15]*).*

Indice

1. Cenni storici sulle prime dimostrazioni

Il risultato algebrico attribuito ai matematici *Henry Frederick Baker*, *John Edward Campbell, Eugene Borisovich Dynkin* e *Felix Hausdorff* (o solo ad alcuni di essi) è fra i più versatili generati dalla prima teoria dei gruppi continui di trasformazioni, dovuta a Sophus Lie durante la seconda metà del XIX secolo. Durante tutto il Novecento, tale risultato (che indicheremo brevemente con l'acronimo 'CBHD', o genericamente come "il Teorema Esponenziale") si è prestato a numerose applicazioni nei seguenti settori:

– in *Fisica*, specialmente con l'affermazione della Meccanica Statistica e Quantistica (si vedano le prime applicazioni degli anni 60-70: [6, 34, 41, 44, 45, 61, 70, 75, 100, 109, 110, 112, 113]; si vedano le recenti pubblicazioni sul Teorema CBHD in riviste di Fisica [8, 9, 17, 24, 25, 57, 58, 59, 60, 71, 73, 78, 89]; i problemi di convergenza ed ottimizzazione [7, 32, 72, 77, 90, 101, 102]);
– in *teoria dei gruppi* [64, 66, 69];

– nell'analisi di alcune *PDE lineari* (si vedano i lavori fondamentali degli anni Settanta-Ottanta [42, 43, 52, 76, 91], assieme ad applicazioni recenti [14, 15, 27, 28, 74, 63, 107]);
– nella teoria dei *gruppi e algebre di Lie* [18, 35, 46, 47, 50, 51, 56, 92, 98, 106];
– e, recentemente, in *Analisi Numerica* (in integrazione geometrica, si vedano [48, 54, 55, 67]).

Di più: durante tutto il secolo scorso e fino agli anni più recenti (si vedano gli articoli [114, 23, 40, 33, 108, 105] datati, rispettivamente, 1937, 1956, 1968, 1975, 1980, 2004), l'interesse per prove semplici e naturali del Teorema CBHD si è mantenuto sempre vivace. Tuttavia, nel corso del tempo, e mano a mano che il successo del Teorema Eponenziale si consolidava in Algebra non-commutativa, l'interesse della letteratura si è spostato verso gli ambiti di applicazione del Teorema, fatto, questo, che ha condotto al problema che qui si tenta di indagare: la confusa e incerta attribuzione della reale paternità del teorema.

La letteratura in materia si è divisa in diverse scuole: chi attribuisce il risultato a Campbell, Baker e Hausdorff; chi a Campbell e Hausdorff; chi solamente ad Hausdorff. Se, come vedremo, le ultime due attribuzioni appaiono quanto mai inappropriate (a titolo esemplificativo, riportiamo un diagramma con le varie attribuzioni relative alla Bibliografia in [13]: si veda la Tabella 2), i contributi forniti dai (più che) precursori del teorema, *Ernesto Pascal*, *Jules Henri Poincaré* e *Friedrich Heinrich Schur*, non sono stati esaminati con sufficiente cura (si vedano solo [93, 104], riguardanti il contributo di Poincaré, rispettivamente, alla teoria dei gruppi e al teorema di Birkhoff-Witt). Un prospetto cronologico completo dei contributi al Teorema Esponenziale è fornito in Tabella 1.

Per colmare queste evidenti lacune, tanto in termini di accuratezza, quanto di necessario confronto fra i primi contributi e la formulazione finale del Teorema Esponenziale (lacuna dovuta anche alle barriere linguistiche: solo tre articoli sono originariamente scritti in inglese; tutti gli altri sono in russo, in italiano, in tedesco, in francese), i lavori di Schur, Campbell, Poincaré, Pascal, Baker, Hausdorff, Dynkin sono stati da noi investigati in [1] (si veda anche [11] sul contributo di Pascal).

Senza pretesa di esaustività, citiamo alcuni fatti riguardanti questi primi contributi:

	Anno	**Autore**	**Articolo**
	1890	Schur	[94, 94]
	1891	Schur	[96]
▶	1893	Schur	[97]
	1897	Campbell	[19, 20]
▶	1898	Campbell	[21]
	1899	Poincaré	[85]
▶	1900	Poincaré	[86]
	1901	Baker	[2]
	1901	Pascal	[79, 80]
	1901	Poincaré	[87]
	1902	Baker	[3]
▶	1902	Pascal	[81, 82, 83]
	1903	Baker	[4]
	1903	Campbell	[22]
	1903	Pascal	[84]
▶	1905	Baker	[5]
▶	1906	Hausdorff	[49]
	1937	Yosida	[114]
	1947	Dynkin	[36]
▶	1949	Dynkin	[37]
	1950	Dynkin	[38]

TABELLA 1. *Riferimenti bibliografici completi per le prime prove del Teorema CBHD (range 1890–1950). I marcatori in nero si riferiscono all'acronimo 'CBHD'; quelli in grigio si riferiscono ad articoli fondamentali per la storia del Teorema Esponenziale inspiegabilmente andati dimenticati.*

(A): Come Engel ci rivela nella review dell'articolo di Pascal [80], lo stesso Sophus Lie si imbarcò nella ricerca di una formula esplicita per il campo vettoriale X_3 tale che $e^{X_3} = e^{X_2} \circ e^{X_1}$; ma -come Engel dice- Lie abbandonò l'impresa poiché non vedeva modo di provare la *convergenza* della serie rappresentante X_3 in termini di X_1, X_2. Sarà Hausdorff [49] a risolvere il problema della convergenza in modo convincente.

(B): Al fine di dimostrare il Terzo Teorema Fondamentale di Lie[1] con un approccio il più diretto possibile, Schur [94, 95] costruì dei campi vettoriali espliciti con costanti di struttura prescritte c_{ijk}, mediante l'uso di serie di potenze dipendenti

[1]Questo teorema asserisce che: *Date* r^3 *costanti reali* $\{c_{ijk}\}_{i,j,k\leq r}$ *che soddisfano le condizioni*

$$c_{ijk} = -c_{jik}, \qquad \textstyle\sum_{s=1}^{r}(c_{ijs}c_{skh} + c_{jks}c_{sih} + c_{kis}c_{sjh}) = 0,$$

per ogni $i, j, h, k = 1, \dots, r$ (queste identità sono ovviamente modellate su antisimmetria e identità di Jacobi)*, esiste un gruppo di trasformazioni le cui costanti di struttura sono le* c_{ijk}, id est tale che le trasformazioni infinitesimali $X_1, \dots, X_r$ di questo gruppo soddisfano $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk}X_k$.

solo dalle c_{ijk} e dai numeri di Bernoulli $\mathbf{B}_n$, definiti da

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_n}{n!}\,z^n,\qquad (z\in\mathbb{C}:\ |z|<2\pi).$$

Anche secondo Schmid [93, page 177], questa è una versione della «formula di Campbell-Hausdorff *in disguise*». Difatti, alcuni anni dopo, Pascal [83] proverà che le formule esplicite di Schur discendono dal Teorema Esponenziale, svelando così in modo incontrovertibile il legame tra le formule di Schur e il futuro Teorema CBHD.

(C): Come si vedrà più avanti, gli addendi della serie associata a $\log(e^x e^y)$ contenenti x precisamente una volta sono dati da

$$z_1(x,y):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_n}{n!}\,(\operatorname{Ad}y)^n(x)=:\frac{\operatorname{Ad}y}{e^{\operatorname{Ad}y}-1}(x), \tag{1}$$

dove i $\mathbf{B}_n$ sono i numeri di Bernoulli. Questa serie giocherà un ruolo essenziale nelle prove di Campbell, Pascal, Baker e Hausdorff. Il primo ad introdurre z_1 in modo esplicito fu Campbell [19], il quale lo impiegò per costruire, in modo ricorsivo, una successione tendente a $\log(e^x e^y)$. La prova di Campbell della convergenza di questa successione sfortunatamente non è esaustiva, e i suoi successori gli riconosceranno per lo più di aver posto -per la prima volta- il *problema* dell'esistenza di una serie universale di Lie-polinomi z in x,y tale che $e^z=e^x e^y$: il cosiddetto *Campbell's Problem*. Campbell fornisce *in nuce* un contributo a quella che diverrà la "tecnica ODE" per la prova del Teorema Esponenziale, poichè per primo ottiene l'identità

$$e^{tx}e^y=\exp\big(y+t\,z_1(x,y)\big)+\mathcal{O}(t^2),\quad \text{se } t\to 0,$$

ed è proprio mediante questa identità che Campbell basa il suo procedimento iterativo.[2]

[2] Per avere un'idea di questo procedimento iterativo, l'identità di cui sopra fornisce

$$(1+t\,x)\,e^y=\exp\big(y+t\,z_1(x,y)\big)+\mathcal{O}(t^2),$$

da cui, posto $y_1:=y+t\,z_1(x,y)$, si ha che y_1 è un Lie-polinomio tale che $(1+t\,x)\,e^y=e^{y_1}+\mathcal{O}(t^2)$. Iterando,

$$(1+t\,x)^2\,e^y=(1+t\,x)\,e^{y_1}+\mathcal{O}(t^2)=\exp\big(y_1+t\,z_1(x,y_1)\big)+2\,\mathcal{O}(t^2),$$

(D): Il primo a sfruttare la tecnica ODE in modo efficace fu Poincaré [86], che caratterizzò la soluzione $z(t)$ di $e^{z(t)} = e^x e^{ty}$ mediante la ODE formalmente scritta come segue
$$z'(t) = \frac{\operatorname{Ad} z(t)}{1 - e^{-\operatorname{Ad} z(t)}}(y), \quad z(0) = x.$$
(Anche in questa formula sono presenti i numeri di Bernoulli, poiché $\frac{z}{1-e^{-z}} = 1 + \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.) Opportunamente specializzata al contesto dei gruppi di trasformazioni di Lie, questa ODE ha un effettivo significato non solo formale, e Poincaré la risolse usando anche il calcolo dei residui, in tal modo da palesare la natura di Lie-polinomio di $z(1) = \log(e^x e^y)$. Sfortunatamente Poincaré non colse mai l'esistenza di una serie universale di Lie-polinomi per $z(1)$ in termini di x, y, *indipendente dal contesto gruppale*. Hausdorff e Bourbaki contesteranno più tardi a Poincaré il suo continuo riferimento ai gruppi e un mancato approccio puramente simbolico. Ciononostante, nel risolvere «le Problème de Campbell» -come lui lo chiama- Poincaré plasmò nientemeno che *l'algebra universale inviluppante* di un'algebra di Lie, ed almeno *implicitamente* nella sua tecnica si può cogliere un procedimento per trasformare $\log(e^x e^y)$ in una Lie-serie.[3]

Diamo un'idea del procedimento. Roughly, nell'algebra inviluppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ogni polinomio omogeneo di grado p è equivalente ad un unico polinomio simmetrico[4] della seguente forma
$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots)^p, \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad X_i \in \mathfrak{g},$$
polinomio che Poincaré chiama *regolare*. Quindi, se $V, T \in \mathfrak{g}$, Poincaré considera la serie $e^V e^T = \sum_{m,n \geq 0} \frac{V^m T^n}{m!\, n!}$ e si propone di dimostrare -con metodo diretto-

ossia $(1 + t\, x)^2\, e^y = e^{y_2} + 2\, \mathcal{O}(t^2)$, ove $y_2 := y_1 + t\, z_1(x, y_1) = y_1 + t\, z_1(x, y + t\, z_1(x, y))$ è ancora un Lie polinomio in x, y. L'idea della prova di Campbell è prendere $t = 1/k$ ed ottenere, induttivamente,
$$\Big(1 + \frac{x}{k}\Big)^k e^y = e^{y_k} + k\, \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big),$$
e mostrare che y_k ha limite (mentre ovviamente il primo membro di cui sopra tende a $e^x e^y$ per $k \to \infty$).

[3]Questo interessantissimo procedimento è descritto in [86] in cui si fa uso di un delicato "processo di simmetrizzazione" dei polinomi, tipico dei risultati attesi per l'algebra inviluppante (si vedano anche Schmid [93] e Ton-That, Tran [104]).

[4]Difatti questo è il ben noto *isomorfismo (di spazi vettoriali) di* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *con l'algebra simmetrica dello spazio vettoriale di* $\mathfrak{g}$, congiuntamente al fatto -altrettanto ben noto- che un tensore simmetrico omogeneo di grado p è una combinazione lineare di potenze di ordine p.

l'esistenza di W tale che $e^V e^T = e^W$. Nell'algebra inviluppante, il monomio $V^m T^n$ può essere reso equivalente ad una somma di polinomi regolari, diciamo

$$\frac{V^m T^n}{m!\,n!} = \sum_{p=0}^{m+n} W(p,m,n), \tag{2}$$

ove $W(p,m,n)$ è simmetrico (sotto forma di combinazioni lineari di potenze) ed omogeneo di grado p. Di conseguenza,

$$e^V e^T = \sum_{m,n\geq 0} \frac{V^m T^n}{m!\,n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{p\leq m+n} W(p,m,n) \Big) =: \sum_{p=0}^{\infty} W_p.$$

Poincaré osserva che, se cerchiamo W -omogeneo di grado 1- tale che $e^V e^T = \sum_{p=0}^{\infty} W^p$, allora W^p è regolare e omogeneo di grado p; quindi, per l'*unicità* del processo di regolarizzazione, si deve necessariamente avere $W_p = \frac{(W_1)^p}{p!}$, per $p \geq 0$. Di fatto, W_1 *deve essere esattamente la serie di CBHD!* Vediamo come tale tecnica sia in effetti costruttiva. Se V, T sono campi vettoriali, *usando solo l'identità* $VT = TV + [V,T]$ si ottiene

$$VT = \tfrac{1}{2}\,VT + \tfrac{1}{2}\,VT = \tfrac{1}{2}\,(VT + TV) + \tfrac{1}{2}\,[V,T] = \tfrac{1}{2}\,(V+T)^2 - \tfrac{1}{2}\,V^2 - \tfrac{1}{2}\,T^2 + \tfrac{1}{2}\,[V,T].$$

Con la notazione in (2), questo dà

$$W(0,1,1) = 0, \quad W(1,1,1) = \tfrac{1}{2}\,[V,T], \quad W(2,1,1) = \tfrac{1}{2}\,\big((V+T)^2 - V^2 - T^2\big).$$

Riconosciamo il primo addendo $\frac{1}{2}\,[V,T]$ *della usuale serie associata al Teorema CBHD!*

(E): Fu l'italiano Ernesto Pascal [79, 80, 81, 82, 83] a perfezionare ulteriormente questo processo di simmetrizzazione (verosimilmente ignaro di star proseguendo un cammino aperto da Poincaré). La somiglianza tra gli approcci di Poincaré e Pascal nello studio del Teorema Esponenziale è così accentuata che potremmo coniare il termine *la tecnica di Poincaré-Pascal*, tecnica che -per la sua originalità- meriterebbe di essere pienamente riscoperta e formalizzata.

Roughly speaking, Pascal *decompone* $e^x e^y$ in $\sum_{m,n\geq 0} \frac{x^m y^n}{m!\,n!}$ e *ricompone* quest'ultimo (attraverso appunto un processo di simmetrizzazione di polinomi congiunto ad un accurato maneggiamento delle costanti coinvolte) in $\sum_{h\geq 0} \frac{z^h}{h!}$, per una opportuna serie z di cui descrive una formula iterativa in termini di Lie brackets di x, y e dei numeri di Bernoulli. La consapevolezza di aver già fornito un contributo cruciale per la comprensione della composizione di due trasformazioni esponenziali nella teoria dei gruppi trattenne probabilmente Pascal dallo studio del problema della convergenza.

Per questa lacuna e per le ingenti ed onerose computazioni impiegate, Engel (nella review degli articoli [80, 83] di Pascal), Hausdorff e Bourbaki useranno parole durissime per commentare i lavori di Pascal (parole che a ben guardare non sono ben giustificate). Nonostante ciò, il contributo di Pascal al Teorema CBHD è -fuori da ogni dubbio- fondamentale, e gli articoli [1, 11] vogliono essere un'occasione per riportare questo contributo alla luce dopo più di cento anni di oblio.

(F): Il passo chiave verso una prova della versione simbolica del Teorema Esponenziale («Exponential Theorem» è proprio il nome usato da Baker [2], [5, §3, page 35], si veda anche «Exponentialformel», nel titolo dell'articolo di Hausdorff [49]) viene compiuto da Baker e da Hausdorff. È curioso osservare che alcune computazioni cruciali e il risultato centrale nei due articoli [5, 49] sono così simili che risulta difficile pensare che siano indipendenti l'uno dall'altro. (*De facto*, l'articolo di Hausdorff [49] fu pubblicato una anno *dopo* quello di Baker [5], ma nessuna menzione di [5] viene fatta in [49]).

La serie di Campbell $z_1(x, y)$ in (1) ricompare usata in modo "quantitativo", e Baker e Hausdorff provano che z_1 genera $\log(e^x e^y)$ nel senso seguente:

$$e^x e^y = e^z, \quad \textit{dove } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n y. \tag{3}$$

(Una splendida prova moderna di questo risultato è contenuta in [88].) Qui $z_1 \frac{\partial}{\partial y}$ è un 'operatore di sostituzione' (Baker lo chiama «substitutional operation»; oggi si chiama anche *polar derivative* o *derivazione operatoriale*), ossia la derivazione dell'algebra associativa delle serie formali in x, y che annulla x e che rimpiazza y con z_1. Ad esempio:

$$\Big(z_1 \frac{\partial}{\partial y}\Big) yx^3y^2x = z_1x^3y^2x + yx^3z_1yx + yx^3yz_1x.$$

È indubbio che l'approccio di Baker nella prova di (3) (basato su un uso alquanto "oscuro" di alcune notazioni che sostituirebbero quelle usuali di bracketing) non regge il confronto con la chiarezza dell'esposizione di Hausdorff (tuttavia non scevra di qualche omissione). Bourbaki consacrerà Hausdorff come l'unica fonte attendibile sul Teorema Esponenziale, e lo stesso Hausdorff (nell'introduzione di [49]) non esiterà a "stroncare" i suoi predecessori. (I punti di vista di Hausdorff e Bourbaki, come da noi mostrato in [1], appaiono molto poco obiettivi.)

Tuttavia, la giusta definizione di (3) ci sembra *la Formula di Baker-Hausdorff*. Quindi, l'abusata locuzione "Campbell-Hausdorff Formula" non sembra avere alcun tipo si substrato storico né matematico. Di più, se nella storia del Teorema Esponenziale uno cerca qualcosa che somigli ad una «Formula», Hausdorff ne fornì almeno tre, Campbell nessuna (dunque cosa significherebbe anche «Campbell-Baker-Hausdorff Formula»?). L'unico ad aver fornito quella che può chiamarsi una formula è anche l'unico Autore che non viene quasi mai citato: Dynkin! (vedi sotto).

(G): Il vero denominatore comune di Campbell, Baker e Hausdorff non è una formula, ma il risultato (più qualitativo che quantitativo) seguente: *Nell'algebra associativa (su di un campo di caratteristica nulla) delle serie formali di potenze in due indeterminate x, y non-commutative, la serie associata a* $\log(e^x e^y)$ *è una serie di Lie-polinomi.* Questo è quello che può essere chiamato *il Teorema di Campbell, Baker, Hausdorff.*

(H): Fu Dynkin [36] (per la prima volta dopo più di 40 anni dall'articolo di Hausdorff) a fornire un'attesa rappresentazione esplicita di $\log(e^x e^y)$ in termini di bracket iterate in x, y, la cosiddetta *Dynkin's Formula* (si veda la sezione seguente), quella ben nota che dà ad esempio

$$\log(e^x e^y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}\big([x[x,y]] + [y[y,x]]\big) - \frac{1}{24}[x[y[x,y]]] + \cdots$$

Sebbene oggi sia abitudine citare Dynkin -relativamente al Teorema Esponenziale- solo se la sua rappresentazione è coinvolta, di fatto il contributo di Dynkin è stato ben più significativo (e per questo abbiamo preferito l'acronimo CBHD); ad esempio:

– Dynkin fornì una stima diretta -la prima nella storia del Teorema CBHD- per il dominio di convergenza, ben più generale di quella di Hausdorff.
– I risultati di Dynkin si generalizzano immediatamente al caso infinito-dimensionale delle cosiddette *algebre di Banach-Lie* (su cui Dynkin torna in esteso in [38]).
– La serie di Dynkin fornisce una prova del Terzo Teorema (locale) di Lie (un cruccio per Schur, Poincaré, Pascal e Hausdorff) in modo incredibilmente semplice.
– In [37] Dynkin fornì un'altra prova del fatto che $\log(e^x e^y)$ è una Lie-serie, indipendente da quella di tutti i suoi predecessori, una prova che mostra tutti gli aspetti *combinatori* celati nel Teorema Esponenziale.

(I): Dopo 30 anni dall'articolo di Hausdorff, Yosida [114] contribuì a chiarire alcuni passaggi non limpidissimi dell'argomento centrale di Hausdorff, evitando altresì l'uso delle simboliche polar derivatives in favore dell'usuale differenziazione rispetto a parametri in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2. Statements

2.1. **Lo statement algebrico generale.** Passiamo dunque a considerare qual è veramente l'asserto del Teorema CBHD. A tal fine fissiamo alcune notazioni. In quanto segue, $\{x,y\}$ è un insieme di cardinalità due. Indichiamo con $\mathcal{T}$ (rispettivamente, $\widehat{\mathcal{T}}$) l'algebra associativa dei polinomi (rispettivamente, delle serie formali) su $\mathbb{Q}$ nelle variabili *non commutative* x, y.

Si possono dimostrare i seguenti fatti [13]:

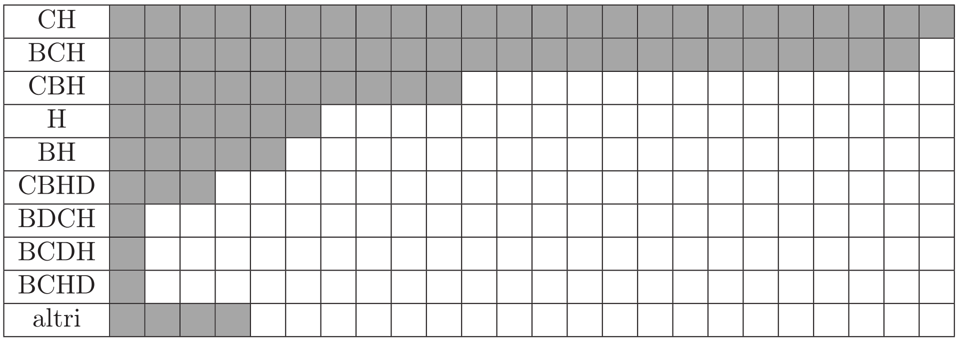

TABELLA 2. *Nomenclatura per il Teorema Esponenziale nella Bibliografia di* [13]. *L'espressione (molto poco calzante) «Campbell-Hausdorff Formula» è quella comunemente impiegata dagli analisti, mentre geometri e fisici impiegano usualmente i tre nomi di Baker, Campbell, Hausdorff. Apparentemente, il primo libro ad usare l'espressione a due nomi è quello di Jacobson* [56], *mentre il primo libro ad usare i tre nomi sembra essere Hausner e Schwartz* [50].

(1) $\mathcal{T}$ è isomorfo all'algebra associativa *libera* delle parole nell'alfabeto $\{x, y\}$, ovvero all'algebra tensoriale $\mathcal{T}(\mathbb{Q}\langle x, y\rangle)$ associata allo spazio vettoriale $\mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Dunque si ha $\mathcal{T} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k$, ove $\mathcal{T}_k$ è lo spazio dei polinomi omogenei (ossia dei tensori omogenei) di grado k in x, y.

(2) Si ha $\widehat{\mathcal{T}} = \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k$ (nel senso del prodotto diretto di insiemi), con i $\mathcal{T}_k$ come sopra.

(3) Fatto fondamentale, $\mathcal{T}$ è uno *spazio metrico* rispetto alla seguente distanza

$$d\big(\textstyle\sum_k p_k, \sum_k q_k\big) := \begin{cases} \exp\big(-\min\{k : p_k \neq q_k\}\big), & \text{se } p_k \neq q_k \text{ per almeno un } k \\ 0, & \text{se } p_k = q_k \text{ per ogni } k. \end{cases}$$

Qui abbiamo convenuto che $p_k, q_k \in \mathcal{T}_k$ per ogni $k \geq 0$. Analogamente si definisce una metrica $\widehat{d}$ su $\widehat{\mathcal{T}}$ (le somme di cui sopra non essendo ora necessariamente finite).

(4) $(\mathcal{T}, d)$ è un sottospazio metrico di $(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{d})$ e quest'ultimo è isomorfo al *completamento isometrico* dello spazio metrico $(\mathcal{T}, d)$. In particolare $\mathcal{T}$ è denso in $\widehat{\mathcal{T}}$ e quest'ultimo è *completo*.

(5) $\mathcal{T}$ e $\widehat{\mathcal{T}}$ sono spazi *ultrametrici*, ossia la disuguaglianza triangolare vale nella forma

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathcal{T}.$$

Analogamente per $\widehat{d}$. Ne segue che la successione $\{x_n\}$ in $\mathcal{T}$ è di Cauchy se e solo se tende a zero $d(x_n, x_{n+1})$; quindi una serie converge se e solo se il suo termine generico è infinitesimo.

(6) Se $\mathcal{T}$ è dotato del bracket indotto dal prodotto, indichiamo con $\mathcal{L}$ la più piccola sottoalgebra di Lie di $\mathcal{T}$ contenente $\{x, y\}$. (Questa algebra di Lie è isomorfa all'algebra di Lie *libera* su due elementi.) Ogni elemento di $\mathcal{L}$ è detto *Lie-polinomio* in x, y (infatti esso è dato da una somma finita di bracket iterati di x e y). La decomposizione diretta $\mathcal{T} = \bigoplus_k \mathcal{T}_k$ induce ovviamente un'analoga decomposizione $\mathcal{L} = \bigoplus_k \mathcal{L}_k$. Indichiamo con $\overline{\mathcal{L}}$ la chiusura di $\mathcal{L}$ nello spazio metrico $\widehat{\mathcal{T}}$. Si ha $\overline{\mathcal{L}} = \prod_k \mathcal{L}_k$. Ogni elemento di $\mathcal{L}$ è detto *Lie-serie* in x, y (infatti esso è dato da una serie formale di bracket iterati di x e y).

Indichiamo con $\mathcal{T}_+$ e $\widehat{\mathcal{T}}_+$ i sottospazi di $\mathcal{T}$ e $\widehat{\mathcal{T}}$, rispettivamente, aventi componente di grado 0 nulla. Si danno le seguenti usuali definizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp} : \widehat{\mathcal{T}}_+ &\longrightarrow 1 + \widehat{\mathcal{T}}_+ & \qquad \mathrm{Log} : 1 + \widehat{\mathcal{T}}_+ &\longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_+ \\ u &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, u^k & 1 + w &\mapsto \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, w^k. \end{aligned}$$

Siamo dunque in grado di enunciare il seguente:

Teorema 2.1 (Campbell, Baker, Hausdorff, Dynkin). *Nelle notazioni precedenti, si ha:*

- ▶ **Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff:** $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y))$ *è un elemento dell'algebra di Lie* $\overline{\mathcal{L}(\mathbb{Q}\langle x, y\rangle)}$, *ossia è una serie di Lie polinomi in x e y a coefficienti razionali;*
- ▶ **Formula di Dynkin:** *Precisamente, vale la seguente formula*

$$\mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y) = \mathrm{Exp}(Z(x,y)), \qquad \textit{ove } Z(x,y) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} Z_j(x,y),$$

e $Z_j(x,y) \in \mathcal{L}_j$ è dato dalla seguente formula "universale":

$$Z_j(x,y) = \sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)\\ h_1+k_1+\cdots+h_n+k_n=j}} \frac{\left[x^{h_1} y^{k_1} \cdots x^{h_n} y^{k_n}\right]}{h_1! \cdots h_n!\, k_1! \cdots k_n!\, \left(\sum_{i=1}^{n}(h_i+k_i)\right)}.$$

Qui si è convenuto di porre

$$
[x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}] = [\overbrace{x\cdots[x}^{h_1\ volte}[\overbrace{y\cdots[y}^{k_1\ volte}\cdots[\overbrace{x\cdots[x}^{h_h\ volte}[\overbrace{y[\cdots y}^{k_n\ volte}]\,]]\,]\,]\,]]\,]. \tag{4}
$$

Nel maneggiare la Formula di Dynkin, ci sembra opportuno introdurre le notazioni utili:

$$
\mathcal{N}_n := \Big\{(h,k)\;\Big|\; h,k\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n,\ (h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)\Big\},
$$

$$
h! = h_1!\cdots h_n!,\quad |h| = h_1+\cdots+h_n,\quad c_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad \mathbf{c}(h,k) := \frac{1}{h!\,k!\,(|h|+|k|)},
$$

$$
D_{(h,k)}(x,y) := [x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}].
$$

Si noti che, con la notazione $\mathrm{Ad}\,a\,(b) := [a,b]$ (valida in una qualunque algebra di Lie), si ha

$$
[u^{h_1}v^{k_1}\cdots u^{h_n}v^{k_n}] = (\mathrm{Ad}\,u)^{h_1}\circ(\mathrm{Ad}\,v)^{k_1}\circ\cdots\circ(\mathrm{Ad}\,u)^{h_n}\circ(\mathrm{Ad}\,v)^{k_n-1}(v)
$$

(se $k_n=0$, intendiamo ovviamente "$\cdots\circ(\mathrm{Ad}\,u)^{h_n-1}(u)$" e così via).

Con le notazioni di cui sopra, l'identità fondamentale del Teorema CBHD dà dunque

$$
\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y) = \mathrm{Exp}\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} c_n \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n:\ |h|+|k|=j} \mathbf{c}(h,k)\,D_{(h,k)}(x,y)\Bigg). \tag{5}
$$

Osserviamo subito che non è aspettabile che (5) si possa specializzare in una identità "in grande" su algebre qualunque. È infatti molto semplice esibire un controesempio (si veda Wei [109]) già nel caso dell'algebra delle matrici quadrate: Ad esempio si ha

$$
\exp\begin{pmatrix} 0 & -5\pi/4 \\ 5\pi/4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},
$$

ma quest'ultima matrice *non può essere l'esponenziale di nessuna matrice quadrata rele*, poiché non possiede alcuna radice quadrata (si noti che ogni matrice di tipo e^C ammette come radice quadrata $e^{C/2}$). Infatti, se così non fosse, esisterebbero $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tali che

$$
\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}.
$$

Ora, uguagliando le entrate di posto $(1,2)$, si ha $b=0$ oppure $a+d=0$, ma queste uguaglianze sono in contraddizione rispettivamente con l'uguaglianza delle entrate di posti $(1,1)$ e $(2,1)$.

Essendo (5) una identità nello spazio prodotto diretto $\widehat{\mathcal{T}} = \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k$, possiamo ottenere da (5) una famiglia di infinite identità, ad esempio proiettandola sui singoli $\mathcal{T}_k$ o su $\mathcal{T}_0 \oplus \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di più, visto che $\mathcal{T}$ è un'algebra libera, si possono ottenere -dalle identità proiettate- una famiglia di identità "*ready-to-use*" su una qualunque algebra associativa unitaria (o anche non unitaria). Ecco due esempi di corollari del Teorema 2.1:

Teorema 2.2 (Specializzazione I)**.** *Sia $(A,*)$ un'algebra associativa su un campo di caratteristica nulla. Per ogni scelta di interi non negativi h_i, k_i, si ponga*

$$\big[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}\big]_* = \overbrace{[a, \cdots [a}^{h_1 \text{ volte}}, \overbrace{[b, \cdots [b}^{k_1 \text{ volte}}, \cdots \overbrace{[a, \cdots [a}^{h_n \text{ volte}}, \overbrace{[b, [\cdots, b}^{k_n \text{ volte}}\,]_*]_* \cdots]_* \cdots]_* \cdots]_*]_* \cdots]_*$$

essendo $[\alpha,\beta]_* = \alpha * \beta - \beta * \alpha$ il crochet associato a $*$.

Allora, per ogni scelta di interi non negativi r, i, j, N e di $a, b \in A$ si hanno le seguenti identità:

(1) *Proiezione su $\mathcal{T}_r(\mathbb{K}\langle x,y\rangle)$:*

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|=r}} \frac{a^{h_1} * b^{k_1} * \cdots * a^{h_n} * b^{k_n}}{h!\, k!} = \sum_{n=1}^{r} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|=r}} \frac{\big[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}\big]_*}{h!\, k!\, (|h|+|k|)};$$

(2) *Proiezione su* $\operatorname{span}\big\{x^{h_1} y^{k_1} \cdots x^{h_n} y^{k_n} \;:\; |h|=i,\ |k|=j\big\}$*:*

$$\sum_{n=1}^{i+j} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|=i,\ |k|=j}} \frac{a^{h_1} * b^{k_1} * \cdots * a^{h_n} * b^{k_n}}{h!\, k!} = \sum_{n=1}^{i+j} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|=i,\ |k|=j}} \frac{\big[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}\big]_*}{h!\, k!\, (|h|+|k|)};$$

(3) *Proiezione su $\mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_N$:*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|\le N}} \frac{a^{h_1} * b^{k_1} * \cdots * a^{h_n} * b^{k_n}}{h!\, k!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|\le N}} \frac{\big[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}\big]_*}{h!\, k!\, (|h|+|k|)}.$$

Questo secondo teorema è ciò che si ottiene "troncando" l'identità (5)**.** È da esso che si ottengono le versioni ODE del Teorema Esponenziale, quelle usate ad esempio da Nagel, Stein, Wainger; Rothschild, Stein, etc... (ragionando come in [16, Chapter 15]).

Teorema 2.3 (Specializzazione II). *Sia* $(A,*)$ *un'algebra associativa su un campo di caratteristica nulla.* (Ad esempio, i campi vettoriali C^∞ su un aperto di $\mathbb{R}^N$ con l'usuale composizione $\circ$ di operatori!) *Sia* $N \in \mathbb{N}$. *Allora esiste una funzione "di resto"*

$$\mathcal{R}^*_{N+1} : A \times A \to A^{N+1} := \mathrm{span}\big\{a_1 * \cdots * a_{N+1} \,\big|\, a_1, \dots, a_{N+1} \in A\big\}$$

tale che la seguente identità in A *sussiste qualunque siano* $a, b \in A$*:*

$$\sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|\le N}} \frac{\big[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}\big]_*}{h!\,k!\,(|h|+|k|)} \right)^{*s} = \sum_{0\le i+j\le N} \frac{a^i * b^j}{i!\,j!} + \mathcal{R}^*_{N+1}(a,b).$$

Più precisamente, $\mathcal{R}^*_{N+1}(a,b)$ *si ottiene sostituendo* x, y *con* a, b *rispettivamente, nell'identità*

$$\sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \Bigg(\sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{N}_n \\ |h|+|k|\le N}} \mathbf{c}(h,k)\, D_{(h,k)}(x,y) \Bigg)^{s} - \sum_{0\le i+j\le N} \frac{x^i y^j}{i!\,j!} = \mathcal{R}_{N+1}(x,y),$$

rimpiazzando altresì l'usuale prodotto su $\mathcal{T}(\mathbb{K}\langle x,y\rangle)$ *con* $*$. *In particolare,* $\mathcal{R}^*_{N+1}(a,b)$ *è una somma di elementi di* $A^{N+1}, A^{N+2}, \dots, A^{N^2}$, *siccome* $\mathcal{R}_{N+1}(x,y)$ *può essere espresso da un polinomio 'universale' in* $\bigoplus_{n=N+1}^{N^2} \mathcal{T}_n(\mathbb{K}\langle x,y\rangle)$.

2.2. **Lo statement di tipo ODE.** Dal Teorema 2.3, facendo ricorso alla usuale formula di Taylor (e ragionando come in [16, Section 15.4]), si possono facilmente ottenere gli statements del Teorema Esponenziale impiegati in Analisi, relativamente ad alcuni tipi di PDE lineari (sub-ellittiche, spesso modellate su campi di Hörmander), come nei famosi articoli di Folland; Folland e Stein; Hörmander; Nagel, Stein e Wainger; Rothschild e Stein; Varopoulos, Saloff-Coste e Coulhon [42, 43, 52, 76, 91, 107].

Prima alcune notazioni. Sia X un campo vettoriale C^∞ su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, id est $X = \sum_{j=1}^N a_j\,\partial_j$, dove gli a_j sono funzioni in $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Fissato $x \in \Omega$, denotiamo con $t \mapsto \exp(tX)(x)$ la curva integrale di X uscente da x, id est la soluzione massimale $t \mapsto \gamma(t)$ di

$$\dot\gamma(t) = \big(a_1(\gamma(t)), \dots, a_N(\gamma(t))\big), \quad \gamma(0) = x.$$

Le notazioni equivalenti $e^{tX}(x), \exp(tX)(x)$ sono motivate dal fatto che, data $f \in C^\infty(\Omega)$, lo sviluppo di Taylor di $f(\gamma(t))$ in $t=0$ è dato da $\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}(X^k f)(x)$. È ben noto che queste curve 'di tipo esponenziale' giocano un ruolo essenziale in molti contesti (analitici e geometrici) di natura sub-Riemanniana. Per esempio, quando $\{X_1,\ldots,X_m\}$ è un sistema di campi vettoriali di Hörmander su $\mathbb{R}^N$, il *Teorema di Connettività di Carathéodory-Chow-Raševskiĭ* assicura che ogni coppia di punti di $\mathbb{R}^N$ può essere collegata da un numero finito di cammini della forma $e^{\pm X_j}(x)$. La rilevanza di questo tipo di mappe è anche corroborata dal fatto che, dati due campi vettoriali X, Y su Ω, si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-tY}\circ e^{-tX}\circ e^{tY}\circ e^{tX}(x)-x}{t^2} = [X,Y](x), \quad x\in\Omega.$$

Un tipico statement "di tipo ODE" per il Teorema CBHD è quello di [76, Proposition 4.3, page 146], che ora ricordiamo: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Sia $Y=\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ un set di campi vettoriali C^∞ su Ω. Allora, per ogni compatto K di Ω ed ogni $M\in\mathbb{N}$, esistono costanti positive C,ε dipendenti da M,K,Y,Ω tali che*

$$\left|\exp\Big(\sum_{j=1}^m s_jY_j\Big)\circ\exp\Big(\sum_{j=1}^m t_jY_j\Big)(x)-\exp\big(Z_M(s,t)\big)(x)\right|\le C\,(|s|^M+|t|^M),$$

per ogni $x\in K$ ed ogni $s,t\in\mathbb{R}^m$ tali che $|s|,|t|\le\varepsilon$. Qui $|\cdot|$ è la norma Euclidea su $\mathbb{R}^N$ e $Z_M(s,t)=\eta_M\big(\sum_{j=1}^m s_jY_j, \sum_{j=1}^m t_jY_j\big)$, essendo

$$\eta_M(A,B)=\sum_{n=1}^M\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{\substack{(h_1,k_1),\ldots,(h_n,k_n)\neq(0,0)\\ h_1+k_1+\cdots+h_n+k_n\le M}}\frac{1}{h!\,k!\,(\sum_{i=1}^n(h_i+k_i))}\times$$
$$\times[\underbrace{A\cdots[A}_{h_1 \text{ volte}}[\underbrace{B\cdots[B}_{k_1 \text{ volte}}\cdots[\underbrace{A\cdots[A}_{h_n \text{ volte}}[\underbrace{B\cdots[B,B}_{k_n \text{ volte}}]]]]]]]].$$

Riconosciamo che $\eta_M(A,B)$ è la somma parziale M-esima che compare nella formula di Dynkin per $\log(e^Ae^B)$. Altre stime delicate concernenti campi vettoriali C^∞ e i loro flussi sono quelle che ottiene Hörmander usando il Teorema CBHD (de facto, lo sviluppo di ordine due $x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\cdots$ è sufficiente). Ad esempio, in [52, pages 160-161], viene provato che, per ogni $k\ge 2$, sussiste la seguente decomposizione (nella $\mathbb{Q}$-algebra delle serie formali in x, y)

$$e^{x+y} = e^x e^y e^{z_2} e^{z_3} \cdots e^{z_k} e^{r_{k+1}},$$

dove (per ogni $n = 2, \dots, k$) z_n è un Lie-polinomio in x, y di lunghezza n, mentre r_{k+1} è una serie formale di Lie polinomi in x, y di lunghezze $\geq k+1$. Analogamente, partendo dal citato sviluppo di grado due, Hörmander deriva un notevole risultato -corollario del Teorema CBHD- che è il passo chiave per il citato Teorema di Connettività di Carathéodory-Chow-Raševskiĭ: questo risultato è basato su una iterazione dell'importante identità per il "commutatore gruppale" $e^{-x}e^{-y}e^x e^y$ data da

$$e^{-x}e^{-y}e^x e^y = \exp\big([x, y] + \{\text{bracket di altezze} \geq 3\}\big),$$

l'iterazione essendo finalizzata ad ottenere una decomposizione di $\exp\big([[[x_1, x_2], x_3] \cdots x_n]\big)$ in prodotti ("universalmente" dati) di esponenziali elementari $e^{\pm x_j}$, $j = 1, \dots, n$ (più un resto). Si veda [52, page 162]. Analoghe decomposizioni sono spesso presenti in PDE's, si veda Folland [42, §5, page 193] e Varopoulos, Saloff-Coste, Coulhon [107, §III.3, pages 34-39] (o i recenti articoli [15, 28, 63, 74]).

Un'altra applicazione del Teorema CBHD compare in Rothschild e Stein [91]. Ad esempio, la seguente formula è usata (si veda [91, §10, page 279]): Dati campi vettoriali $W_1, \dots, W_m$ di classe C^∞ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ e posto $u \cdot W := \sum_{j=1}^m u_j\, W_j$, si ha (per ogni intero $l \geq 2$)

$$\begin{aligned}
&\exp\big(u \cdot W\big) \circ \exp(\tau\, W_1)(\xi) \\
&= \exp\Big(u \cdot W + \tau\, W_1 + \tau \cdot \sum_{1 \leq p < l} c_p \, (\mathrm{Ad}\,(u \cdot W))^p(W_1)\Big)(\xi) + \mathcal{O}(|u|^l, \tau^2),
\end{aligned}$$

per $\xi \in \Omega$ e per τ, u sufficientemente piccoli. (Dai primi articoli sul Teorema Esponenziale, sappiamo anche l'attuale valore delle costanti c_p, viz $c_p = \frac{\mathbf{B}_p}{p!}$.)

3. Prove

Presentiamo, in estrema sintesi, alcuni argomenti degni di nota relativamente alle prove -più o meno attuali- del Teorema CBHD.

3.1. **La prova di Bourbaki.** Storicamente, è la prova di Bourbaki [18] la prima dimostrazione (completamente soddisfacente) di natura espressamente algebrica del Teorema Esponenziale. La caratteristica essenziale di questo tipo di prova è di ottenere la "Lie-polinomialità" di $\log(e^x e^y)$ come corollario di una caratterizzazione generale dei Lie-polinomi, avente un interesse indipendente. Questa è la strada seguita anche da Cartier [23], Hochschild [51], Jacobson [56], Reutenauer [88], Serre [98].

Tale caratterizzazione si basa sul seguente teorema dovuto a Friedrichs [44] (la prova si può trovare in ciascuna delle citazioni di cui sopra; si veda anche [13]):

Teorema 3.1 (Friedrichs's Characterization of $\mathcal{L}(V)$)**.** *Sia V uno spazio vettoriale (su un campo di caratteristica nulla). Sia $\delta : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V)$ l'unico morfismo di algebre associative unitarie tale che $\delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, per ogni $v \in V$. Allora*

$$\mathcal{L}(V) = \Big\{ t \in \mathcal{T}(V) \,\Big|\, \delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t \Big\}.$$

Osserviamo esplicitamente che *per la prova di questo teorema si usa il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt* (si veda la Sezione 4 per l'enunciato di quest'ultimo). Ora, per dimostrare che $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y))$ è una Lie-serie, basterà provare che ogni somma parziale t_n della serie ad esso associata verifica $\delta(t_n) = t_n \otimes 1 + 1 \otimes t_n$, il che segue abbastanza facilmente dalle proprietà algebriche delle operazioni su $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, e dalla definizione di Exp e Log.

Equivalentemente, la prova Bourbakista del Teorema Esponenziale equivale al mostrare che la restrizione di Exp a $\overline{\mathcal{L}(V)}$ è una biezione sul seguente insieme

$$\Gamma(V) := \Big\{ x \in 1 + \widehat{\mathcal{T}}_+(V) \,\Big|\, \widehat{\delta}(x) = x \otimes x \Big\},$$

detto (da Bourbaki) il *gruppo di Hausdorff* (relativo a V). Si può infatti provare, *sempre mediante il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt*, che $\Gamma(V)$ è un sottogruppo moltiplicativo di $\widehat{\mathcal{T}}(V)$. Una volta provato questo, congiuntamente al fatto che $\mathrm{Exp}(\overline{\mathcal{L}(V)}) = \Gamma(V)$, ne segue allora il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff nella sua forma più generale

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(u)\mathrm{Exp}(v)) \in \overline{\mathcal{L}(V)}, \quad \text{per ogni } u, v \in \overline{\mathcal{L}(V)}$$

(che implica ovviamente il Teorema 2.1). Infatti, se $u, v \in \overline{\mathcal{L}}$, ne segue necessariamente che $\mathrm{Exp}(u), \mathrm{Exp}(v) \in \Gamma$, cosicché (essendo Γ un gruppo) $\mathrm{Exp}(u)\mathrm{Exp}(v) \in \Gamma$; di conseguenza, il logaritmo di questo prodotto appartiene a $\overline{\mathcal{L}}$, sempre grazie a $\mathrm{Exp}(\overline{\mathcal{L}}) = \Gamma$.

In effetti, la formulazione originaria del Teorema di Friedrichs è molto più semplice a vedersi di quella moderna di cui al Teorema 3.1 (essa tuttavia cela il vero significato algebrico degli oggetti coinvolti: si noti infatti che i polinomi vengono impropriamente trattati come *funzioni* delle proprie incognite). Secondo questa formulazione equivalente, *un polinomio $F(x, y)$ in x, y è un Lie-polinomio se e solo se, introdotte nuove variabili x', y' che commutano con ciascuna delle x, y (ma non tra loro) si ha*

$$F(x + x', y + y') = F(x, y) + F(x', y').$$

La prova (per nulla banale!) di questo risultato si può trovare in Cohn [29], Lyndon [62] e Magnus [65]. Mediante questa formulazione, la prova del Teorema Esponenziale è (o meglio, appare) quasi banale: nelle notazioni di cui sopra, dobbiamo provare che

$$\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}(x + x')\mathrm{Exp}(y + y')\big) = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)) + \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x')\mathrm{Exp}(y')),$$

il che è equivalente a (applicando Exp ad entrambi i membri)

$$\mathrm{Exp}(x + x')\mathrm{Exp}(y + y') = \mathrm{Exp}\Big\{\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)) + \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x')\mathrm{Exp}(y'))\Big\};$$

visto che i due addendi nelle graffe chiaramente commutano si ha (grazie alla versione triviale del Teorema CBHD applicata ripetutamente!)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}\{\cdots\} &= \mathrm{Exp}\big\{\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y))\big\}\,\mathrm{Exp}\big\{\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x')\mathrm{Exp}(y'))\big\}\\
&= \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)\mathrm{Exp}(x')\mathrm{Exp}(y') = \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(x')\mathrm{Exp}(y)\mathrm{Exp}(y')\\
&= \mathrm{Exp}(x + y)\mathrm{Exp}(x' + y'),
\end{aligned}$$

che è quanto si voleva provare.

3.2. **La prova di Hausdorff.** Forniamo uno sketch dell'argomento di Hausdorff per la prova del Teorema Esponenziale. Sia F un polinomio (su un set finito di indeterminate non commutative). Hausdorff tratta F come funzione delle indeterminate e scrive una sorta di "sviluppo di Taylor"

$$F(x+u) = F(x) + \Big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x) + \frac{1}{2!}\Big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 F(x) + \frac{1}{3!}\Big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)^3 F(x) + \cdots, \tag{6}$$

ove $\big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\big)^n F(x)$ è la somma degli addendi di $F(x+u)$ contenenti u precisamente n volte, ossia denota l'applicazione su $F(x)$ della composizione n-esima dell'operatore $u\,\frac{\partial}{\partial x}$ con se stesso, ove $u\,\frac{\partial}{\partial x}$ è la derivazione che applica x in u (lasciando le altre indeterminate inalterate). Ad esempio

$$\Big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)x^2yx = uxyx + xuyx + x^2yu;$$

o ancora, se $F = F_0^x + F_1^x + F_2^x + \cdots$, ove F_n^x contiene x esattamente n volte, uno ha

$$\big(x\,\tfrac{\partial}{\partial x}\big)F(x) = F_1^x + 2\,F_2^x + \cdots + n\,F_n^x + \cdots \tag{7}$$

La formula fondamentale di Hausdorff è la seguente (su cui torneremo nella Sezione 3.4):

$$\Big(u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)e^x = \begin{cases} e^x \cdot \dfrac{1-e^{-\mathrm{Ad}\,x}}{\mathrm{Ad}\,x}(u) \\ \dfrac{e^{\mathrm{Ad}\,x}-1}{\mathrm{Ad}\,x}(u)\cdot e^x. \end{cases} \tag{8}$$

(Queste identità erano già state scoperte da Baker, un anno prima di Hausdorff, e almeno implicitamente, anche da Poincaré nella sua tecnica ODE). Ora, le identità (8) congiuntamente allo sviluppo (6) danno gli sviluppi seguenti

$$e^{x+t\,u} = e^x\bigg(1 + t\,\frac{1-e^{-\mathrm{Ad}\,x}}{\mathrm{Ad}\,x}(u) + \mathcal{O}(t^2)\bigg), \tag{9}$$

$$e^{x+t\,u} = \bigg(1 + t\,\frac{e^{\mathrm{Ad}\,x}-1}{\mathrm{Ad}\,x}(u) + \mathcal{O}(t^2)\bigg)e^x. \tag{10}$$

Ecco come Hausdorff usa questi risultati:

Sia $z(t)$ definito da $e^{z(t)} = e^{x+t\,x}e^y$, ossia $z(t) = \log\big(e^{x+t\,x}e^y\big)$, e si ponga $z := z(0)$ cosicché $e^z = e^xe^y$. Dallo sviluppo (6) applicato a $F(x) = \log(e^xe^y)$ e con la scelta $u = t\,x$, segue

$$z(t) = z + t\,\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)z + \mathcal{O}(t^2) = z + t\,\Big\{\big(x\,\tfrac{\partial}{\partial x}\big)z + \mathcal{O}(t)\Big\}.$$

Quindi, grazie a (10) applicato a $x=z$ e $u=\big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\big)z+\mathcal{O}(t)$ segue

$$\begin{aligned}e^{z(t)}=e^{z+t\{\cdots\}}&\overset{(10)}{=}\bigg(1+t\,\frac{e^{\operatorname{Ad}z}-1}{\operatorname{Ad}z}\Big\{\big(x\,\tfrac{\partial}{\partial x}\big)z+\mathcal{O}(t)\Big\}+\mathcal{O}(t^2)\bigg)e^z\\&=\bigg(1+t\,\frac{e^{\operatorname{Ad}z}-1}{\operatorname{Ad}z}\Big(\big(x\,\tfrac{\partial}{\partial x}\big)z\Big)+\mathcal{O}(t^2)\bigg)e^z.\end{aligned}$$

D'altra parte, sempre da (10) applicata a $e^{x+t\,x}$, si deduce

$$e^{z(t)}=e^{x+t\,x}e^y\overset{(10)}{=}\Big(1+t\,\frac{e^{\operatorname{Ad}x}-1}{\operatorname{Ad}x}(x)+\mathcal{O}(t^2)\Big)e^xe^y=\big(1+t\,x+\mathcal{O}(t^2)\big)e^z.$$

Confrontando i due sviluppi di $e^{z(t)}$ di cui sopra, si ottiene $\frac{e^{\operatorname{Ad}z}-1}{\operatorname{Ad}z}\Big(\big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\big)z\Big)=x$, da cui, invertendo,

$$\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)z=\frac{\operatorname{Ad}z}{e^{\operatorname{Ad}z}-1}(x). \tag{11}$$

Un argomento duale, basato stavolta su (9), applicato a $e^xe^{y+t\,y}$ fornisce l'altra "PDE"

$$\Big(y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)z=\frac{\operatorname{Ad}z}{1-e^{-\operatorname{Ad}z}}(y). \tag{12}$$

Mettendo assieme (11) e (12) si ottiene infine

(13)

$$\begin{aligned}&\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)z+\Big(y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)z=\frac{\operatorname{Ad}z}{e^{\operatorname{Ad}z}-1}(x)+\frac{\operatorname{Ad}z}{1-e^{-\operatorname{Ad}z}}(y)=\frac{\operatorname{Ad}z}{e^{\operatorname{Ad}z}-1}(x)+\frac{-\operatorname{Ad}z}{e^{-\operatorname{Ad}z}-1}(y)\\&\qquad\bigg(\text{ricordando che }\frac{z}{e^z-1}=1-\tfrac{1}{2}\,z+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,z^{2p}\bigg)\\&=\Big\{x-\tfrac12\,[z,x]+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\operatorname{Ad}z)^{2p}(x)\Big\}+\Big\{y-\tfrac12\,[-z,y]+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(-\operatorname{Ad}z)^{2p}(y)\Big\}\\&=x+y+\tfrac12[z,y-x]+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\operatorname{Ad}z)^{2p}(x+y)\\&=x+y+\tfrac12\,[z,x+y]+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\operatorname{Ad}z)^{2p}(x+y)+[x,z]\\&=\frac{\operatorname{Ad}z}{1-e^{-\operatorname{Ad}z}}(x+y)+[x,z].\end{aligned}$$

Questo dà la formula notevole (si veda [49, eq. (29), page 31])

$$\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)z+\Big(y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)z=[x,z]+\frac{\mathrm{Ad}\,z}{1-e^{-\mathrm{Ad}\,z}}(x+y). \tag{14}$$

Inserendo in (14) lo sviluppo formale $z=z_1^{x,y}+z_2^{x,y}+\cdots$, ove $z_n^{x,y}$ ha grado n in x,y si ottiene una formula ricorsiva per gli $z_n^{x,y}$ che mostra in modo cristallino la loro natura di Lie-polinomi. Questa formula ritornerà in prove moderne del Teorema di CBH, si vedano Djoković [33] e Varadarajan [106], e -come mostriamo nella Sezione 3.5- essa dà notevoli informazioni anche per questioni di convergenza. Questa formula ricorsiva, congiuntamente alla proprietà universale dell'algebra $\mathcal{T}(\mathbb{Q}\langle x,y\rangle)$ fornisce il seguente risultato, dall'interesse indipendente:

Teorema 3.2 (Varadarajan)**.** *Denotiamo con $\mathbf{B}_n$ gli usuali numeri di Bernoulli.*

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie (su un campo di caratteristica 0). Per ogni $j\in\mathbb{N}$ e $u,v\in\mathfrak{g}$ poniamo

$$Z_j(u,v)=\sum_{n=1}^{j}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{\substack{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)\\|h|+|k|=j}}\frac{\big[u^{h_1}v^{k_1}\cdots u^{h_n}v^{k_n}\big]}{h!\,k!\,(|h|+|k|)}. \tag{15}$$

Per ogni $j\in\mathbb{N}$ e ogni $u,v\in\mathfrak{g}$, si ha allora la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} Z_1(u,v)=u+v,\\[1ex] Z_2(u,v)=\frac14[Z_1(u,v),v-u]\\[1ex] Z_{j+1}(u,v)=\frac{1}{2(j+1)}\,[Z_j(u,v),v-u]+\\[1ex] \qquad+\displaystyle\sum_{\substack{p\geq1,\ 2p\leqslant j,\ k_1,\dots,k_{2p}\geqslant1\\k_1+\cdots+k_{2p}=j}}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(j+1)\,(2\,p)!}\,[Z_{k_1}(u,v)\cdots[Z_{k_{2p}}(u,v),u+v]\cdots]. \end{cases} \tag{16}$$

Ricordiamo infine che Hausdorff, con le tecniche che hanno portato a (11) e (12), prova la seguente formula, trovata un anno prima da Baker, che potremmo chiamare *la Formula* *di Baker-Hausdorff*:

$$
\begin{aligned}
&e^x e^y = e^z, \quad \textit{ove } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\omega(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n y, \\
&\textit{essendo} \quad \omega(x,y) = \frac{\operatorname{Ad} y}{e^{\operatorname{Ad} y} - 1}(x) = x + \frac{1}{2}\,[x,y] + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\operatorname{Ad} y)^{2p}(x).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

La (17) deriva dalla PDE

$$
\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big) z = \Big(\frac{\operatorname{Ad} y}{e^{\operatorname{Ad} y} - 1}(x)\,\frac{\partial}{\partial y}\Big) z,
$$

che si può risolvere ponendo $z = z_0^x + z_1^x + \cdots$, ove z_n^x contiene x esattamente n volte, cosicché (si veda anche (7), osservando che l'azione di $\omega(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}$ accresce di un grado la x)

$$
z_n^x = \frac{1}{n!} \Big(\omega(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n y, \quad n \geq 0.
$$

3.3. **La prova di Dynkin.** Merita di sottolineare subito come si ricavi -tra l'altro facilmente!- la formula esplicita per $\log(e^x e^y)$ in serie di Lie-polinomi, partendo solo dal presupposto di sapere (fatto di per sé qualitativo) che $\log(e^x e^y)$ è una Lie-serie. Mostriamo insomma come *il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff porti alla Formula di Dynkin, con semplici risultati algebrici* (tra l'altro, di interesse indipendente). Tutto si basa sul seguente:

Lemma 3.1 (Dynkin, Specht, Wever)**.** *Sia V uno spazio vettoriale su un campo di caratteristica* 0*. Sia $[\cdot,\cdot]$ il bracket associato all'algebra tensoriale $\mathcal{T}(V)$ relativa a V. Sia infine $\mathcal{L}(V)$ la più piccola sottoalgebra di Lie di $\mathcal{T}(V)$ contenente V (*$\mathcal{L}(V)$ è detta l'algebra di Lie libera relativa allo spazio vettoriale V*).*

Si consideri l'unica applicazione lineare $P : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{L}(V)$ tale che

$$
\begin{aligned}
&P(1) = 0, \quad P(v_1) = v_1, \\
&P(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = k^{-1}\,[v_1, \ldots [v_{k-1}, v_k] \ldots], \quad \forall\, k \geq 2,
\end{aligned}
$$

qualunque siano $v_1, \ldots, v_k \in V$. Allora P è suriettiva a coincide con la mappa identica su $\mathcal{L}(V)$. In altre parole, P è una proiezione su $\mathcal{L}(V)$.

Questo dà ovviamente una caratterizzazione dei Lie-polinomi, come segue:

$$\mathcal{L}(V) = \big\{t \in \mathcal{T}(V) \,\big|\, P(t) = t\big\}.$$

(Per la prova del Lemma 3.1, peraltro non onerosa, si veda Dynkin [36], oppure -per prove algebriche più moderne- libri classici quali [51, Proposition 2.2], [56, Chapter V, §4, Theorem 8], [88, Theorem 1.4], [98, Chapter IV, §8, LA 4.15]; si veda anche [13, Chapter 3]).

È immediato verificare che, con l'usuale struttura metrica sullo spazio $\widehat{\mathcal{T}}(V)$ delle serie formali associate a $\mathcal{T}(V)$, $P : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)$ è **uniformemente continua** e si estende quindi in modo unico ad una mappa continua $\widehat{P} : \widehat{\mathcal{T}}(V) \to \widehat{\mathcal{T}}(V)$ per mezzo della quale si ha la seguente caratterizzazione

$$\overline{\mathcal{L}(V)} = \big\{t \in \widehat{\mathcal{T}}(V) \,\big|\, \widehat{P}(t) = t\big\}. \tag{18}$$

Assumendo il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff (prima parte del Teorema 2.1), siamo in grado di dare la seguente:

Dimostrazione della Formula di Dynkin. Supponiamo di sapere che

$$x\blacklozenge y := \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y))$$

appartiene a $\overline{\mathcal{L}(\mathbb{Q}\langle x, y\rangle)}$, ossia è una Lie-serie nelle indeterminate x, y. Grazie a (18), $\widehat{P}$ lascia inalterato $x\blacklozenge y$. D'altra parte, esplicitando le serie formali che definiscono $\mathrm{Exp}, \mathrm{Log}$ si ha

$$x\blacklozenge y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)} \frac{x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}}{h_1!\cdots h_n!\, k_1!\cdots k_n!}.$$

Applicando $\widehat{P}$ ed utilizzando il fatto che $x\blacklozenge y = \widehat{P}(x\blacklozenge y)$ e che $\widehat{P}$ estende P, si ha subito

$$x\blacklozenge y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)} \frac{[x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}]}{h!\, k!(|h| + |k|)}. \tag{19}$$

Qui, al solito, $[x^{h_1}\cdots y^{k_n}]$ denota il bracket annidato (4). Riordinando la serie di cui sopra rispetto a $|h|+|k|$, si ottiene la Formula di Dynkin:

$$x\blacklozenge y=\sum_{j=1}^{\infty}Z_j(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{n=1}^{j}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{\substack{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)\\ |h|+|k|=j}}\frac{[x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}]}{h!\,k!(|h|+|k|)}\Bigg).\qquad\square$$

3.4. **La "spina dorsale" della prova generale.** Lo scopo di questa Sezione è di dare una prova del Teorema CBHD che si possa facilmente adattare a vari casi di interesse. La prova che forniamo di seguito risulta da un mosaico di contributi di Campbell [19], Poincaré [86], Baker [5], Hausdorff [49], Djoković [33], Czichowski [30]. La prova si applica:

- al caso **algebrico generale**, direttamente;
- al caso delle **algebre di matrici** quadrate, con minime modifiche;
- al caso delle **algebre di Banach**, con semplici modifiche.

Con le dovute modifiche (leggermente più sofisticate delle precedenti), gli argomenti qui presentati si adattano anche al caso delle **algebre di Lie** di gruppi di Lie.

La prova è basata sui seguenti lemmi di algebra non commutativa. Ricordiamo che, in un'algebra di Lie si pone $(\mathrm{Ad}\,b)(a)=[b,a]$ e -in generale- in un'algebra associativa $(\mathrm{Ad}\,b)(a)=ba-ab$.

Lemma 3.2. *Sia A un'algebra associativa (unitaria). Allora si ha*

$$(\mathrm{Ad}\,b)^n(a)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\,b^{n-i}ab^i,$$

per ogni $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ed ogni coppia di elementi $a,b\in A$.

Dimostrazione. Indichiamo con L_c,R_c rispettivamente le mappe di moltiplicazione a sinistra e a destra per c, per un $c\in A$ generico. Si ha dunque che $[b,a]=ba+a(-b)=(L_b+R_{-b})(a)$ e, poiché L_b,R_{-b} commutano, segue (dalla formula di Newton classica)

$$(\mathrm{Ad}\,b)^n(a)=(L_b+R_{-b})^n(a)=\sum_{i=0}^{n}\tbinom{n}{i}\,L_b^{n-i}\circ R_{-b}^{i}(a),$$

che dà immediatamente la tesi. $\square$

Ricordiamo che una derivazione D di un'algebra associativa A è un'applicazione lineare $D : A \to A$ verificante la formula di Leibnitz: $D(ab) = (Da)b + a(Db)$, per ogni $a, b \in A$.

Lemma 3.3. *Sia A un'algebra associativa (unitaria) e sia D una derivazione di A. Allora*

$$D(u^n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} \cdot (-\mathrm{Ad}\, u)^k (Du) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (\mathrm{Ad}\, u)^k (Du) \cdot u^{n-1-k}, \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $u \in A$.

Dimostrazione. Trattasi di un esercizio sulla commutazione, basato su

$$D(u^2) = (Du)\, u + u\, (Du) = \begin{cases} u\, (Du) - [u, Du] + u\, (Du) = 2\, u\, (Du) + (-\mathrm{Ad}\, u)(Du), \\ (Du)\, u + (Du)\, u - [Du, u] = 2\, (Du)\, u + (\mathrm{Ad}\, u)(Du). \end{cases}$$

La prova generale segue per induzione su n. □

Nel seguito, quando sono coinvolte serie formali, sarà sottinteso che esse sono definite in uno dei tre contesti citati nell'incipit.[5] Quindi A denoterà una delle seguenti tre algebre:

- A è l'algebra $\mathcal{T}[[t]]$ delle serie formali nella indeterminata t ed aventi i coefficienti in $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Q}\langle x, y\rangle)$, l'algebra dei polinomi nelle due indeterminate non commutative x, y;
- A è l'algebra delle matrici quadrate a coefficienti reali o complessi;
- A è un'algebra di Banach (reale o complessa) qualunque.

[5] Ad esempio, la prova qui fornita non ha bisogno di alcuna modifica se si considera il seguente caso algebrico generale: Data l'algebra dei polinomi $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mathbb{Q}\langle x, y\rangle)$ su due variabili non commutative, $\mathcal{T}[t]$ denota *l'algebra dei polinomi in una indeterminata t e coefficienti in $\mathcal{T}$*. Si vede facilmente che $\mathcal{T}[t]$ è denso in $A := \mathcal{T}[[t]]$, l'associata algebra delle serie formali, ove quest'ultima è dotata della metrica

$$d\Big(\sum_{j\geq 0} a_j\, t^j, \sum_{j\geq 0} b_j\, t^j\Big) = \begin{cases} 0, \ \text{se } a_j = b_j \text{ per ogni } j \geq 0, \\ \exp\Big(- \min\{j \geq 0 \ : \ a_j \neq b_j\}\Big), \ \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, $\mathcal{T}[[t]]$ è completamento isometrico di $\mathcal{T}[t]$. Le usuali mappe $\mathrm{Exp}, \mathrm{Log}$ sono definite nel modo ovvio, e

$$\partial_t : \mathcal{T}[[t]] \longrightarrow \mathcal{T}[[t]], \qquad \sum_{j\geq 0} a_j\, t^j \mapsto \sum_{j\geq 0} (j+1)\, a_{j+1}\, t^j.$$

Si verifica immediatamente che ∂_t è una derivazione continua di $\mathcal{T}[[t]]$. Essa inoltre verifica le identità usuali $\partial_t\big(\mathrm{Exp}(a\, t)\big) = a\, \mathrm{Exp}(a\, t) = \mathrm{Exp}(a\, t)\, a$.

Conseguenze cruciali dei Lemmi 3.2 e 3.3, rispettivamente, sono i seguenti teoremi.

Teorema 3.3 (Coniugio con un Esponenziale)**.** *Per ogni $u \in A$ per cui sono ben posti* $\mathrm{Exp}(\pm u)$ *si ha*

$$\mathrm{Exp}(u) \cdot z \cdot \mathrm{Exp}(-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{Ad}\, u)^n(z), \qquad \textit{per ogni } z \in A, \tag{20}$$

ossia, in notazione compatta $e^u \cdot z \cdot e^{-u} = e^{\mathrm{Ad}\, u}(z)$.

Dimostrazione. Nelle notazioni precedenti si ha immediatamente

$$\mathrm{Exp}(u) \cdot z \cdot \mathrm{Exp}(-u) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m \cdot z \cdot (-u)^i}{m!\, i!}$$

$$\Big(\text{si riordini la somma procedendo "per quadrati": } \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+m=n}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u^{n-i} \cdot z \cdot u^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{Ad}\, u)^n(z).$$

Qui abbiamo usato il Lemma 3.2. □

Teorema 3.4 (Differenziale dell'Esponenziale)**.** *Sia D una derivazione continua di A. Allora,*

$$D(\mathrm{Exp}(u)) = \begin{cases} \mathrm{Exp}(u) \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mathrm{Ad}\, u)^{k-1}(Du) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{Ad}\, u)^{k-1}(Du) \cdot \mathrm{Exp}(u) \end{cases} \tag{21}$$

per ogni u per cui ha senso $\mathrm{Exp}(u)$*. In notazione compatta,*

$$D(e^u) = e^u \cdot \frac{1 - e^{-\mathrm{Ad}\, u}}{\mathrm{Ad}\, u}(Du), \qquad D(e^u) = \frac{e^{\mathrm{Ad}\, u} - 1}{\mathrm{Ad}\, u}(Du) \cdot e^u.$$

Dimostrazione. Passando D sotto segno di serie si ha (usando la prima identità nel Lemma 3.3)

$$D(\mathrm{Exp}(u)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, D(u^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k+1}\, u^{n-1-k} \cdot (-\mathrm{Ad}\, u)^k(Du)$$

$$\Big(\text{si usi } \tfrac{1}{n!}\tbinom{n}{k+1} = \tfrac{1}{(k+1)!(n-1-k)!}, \text{ si scambino le somme: } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}$$
$$\text{e si rinomini l'indice interno: } m = n-1-k\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m \cdot (-\mathrm{Ad}\, u)^k(Du)}{(k+1)!\, m!} \qquad \text{(le due serie iterate si spezzano in un prodotto)}$$

$$= \mathrm{Exp}(u) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{Ad}\, u)^k(Du)}{(k+1)!} \right) = \mathrm{Exp}(u) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (-\mathrm{Ad}\, u)^{k-1}(Du).$$

La seconda identità segue usando la seconda identità del Lemma 3.3. □

Grazie ai precedenti risultati, siamo ora in grado di provare la ODE chiave per la curva

$$t \mapsto Z(t) := \mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}(tX) \cdot \mathrm{Exp}(tY)\big).$$

Questa curva è certamente ben definita nel caso algebrico di $\mathcal{T}[[t]]$ qualunque siano X, Y, ed è invece ben posta, per $t \in [0,1]$, nei casi di algebre di Banach, se X, Y sono abbastanza piccoli. Si noti che, per definizione, $Z(t)$ verifica

$$\mathrm{Exp}(Z(t)) = \mathrm{Exp}(tX) \cdot \mathrm{Exp}(tY), \tag{22}$$

e, dalle proprietà generali di ∂_t si ha anche

$$\partial_t(\mathrm{Exp}(tX)) = X \cdot \mathrm{Exp}(tX), \qquad \partial_t(\mathrm{Exp}(tY)) = \mathrm{Exp}(tY) \cdot Y. \tag{23}$$

Tutto questo premesso si ha allora il seguente calcolo cruciale

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-e^{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}}{\mathrm{Ad}\,Z(t)}(\partial_t Z(t)) \overset{(21)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(Z(t)))\\
&\overset{(22)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t\big(\mathrm{Exp}(tX)\cdot \mathrm{Exp}(tY)\big)\\
&\ \ = \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(tX))\cdot \mathrm{Exp}(tY) + \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \mathrm{Exp}(tX)\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(tY))\\
&\overset{(23)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot X\cdot \mathrm{Exp}(tX)\cdot \mathrm{Exp}(tY) + \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \mathrm{Exp}(tX)\cdot \mathrm{Exp}(tY)\cdot Y\\
&\overset{(22)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot X\cdot \mathrm{Exp}(Z(t)) + Y \overset{(20)}{=} e^{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}(X)+Y.
\end{aligned}
$$

Considerando solo primo e ultimo membro, abbiamo provato

$$\frac{1-e^{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}}{\mathrm{Ad}\,Z(t)}(\partial_t Z(t)) = e^{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}(X)+Y,$$

che, risolta rispetto a $\partial_t Z(t)$, dà la **ODE non lineare**

$$\partial_t Z(t) = \frac{\mathrm{Ad}\,Z(t)}{e^{\mathrm{Ad}\,Z(t)}-1}\big(X + e^{\mathrm{Ad}\,Z(t)}(Y)\big),$$

che può anche essere riscritta in modo più simmetrico come segue (come in [30])

$$\partial_t Z(t) = \frac{\mathrm{Ad}\,Z(t)}{e^{\mathrm{Ad}\,Z(t)}-1}(X) + \frac{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}{e^{-\mathrm{Ad}\,Z(t)}-1}(Y).$$

Riconosciamo la prima formula nella serie di computazioni in (13), dovute già ad Hausdorff. Utilizzando la quarta riga di (13), che dà

$$\partial_t Z(t) = X+Y+\tfrac{1}{2}[Z(t),Y-X] + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\mathrm{Ad}\,Z(t))^{2p}(X+Y), \tag{24}$$

sostituendo a $Z(t)$ il suo sviluppo in componenti omogenee $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(X,Y)\,t^n$ ed uguagliando membro a membro i coefficienti dei vari t^n si ottiene immediatamente la formula ricorsiva (16) di Varadarajan: essa dimostra *de visu* che gli $Z_n(X,Y)$ sono Lie-polinomi ed essendo $Z(1) = \log(e^x e^y)$ il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff è provato!

3.5. **La prova della convergenza di Varadarajan.** Di seguito, forniamo un'interessante prova -dovuta a Vardarajan [106]- di un dominio di convergenza assoluta della serie $\sum_{j=1}^{\infty} Z_j(x,y)$, ove gli Z_j sono come in (15) ed x, y appartengono ad un'algebra di Banach-Lie.

Dapprima osserviamo che un dominio "minimale" di convergenza può essere dato partendo semplicemente dalla Formula di Dynkin con un calcolo semplicissimo. Infatti, se $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \|\cdot\|)$ è un'algebra di Banach-Lie con la norma che verifica[6] $\|[a,b]\| \le \|a\| \cdot \|b\|$, si ha immediatamente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|Z_j(x,y)\| &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0) \\ |h|+|k|=j}} \frac{[x^{h_1} y^{k_1} \cdots x^{h_n} y^{k_n}]}{h!\,k!(|h|+|k|)} \Big\| \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{n} \sum_{\substack{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0) \\ |h|+|k|=j}} \frac{\|x\|^{|h|}\, \|y\|^{|k|}}{h!\,k!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)} \frac{\|x\|^{|h|}\, \|y\|^{|k|}}{h!\,k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(\sum_{(r,s)\neq(0,0)} \frac{\|x\|^{r}\, \|y\|^{s}}{h!\,k!} \Big)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \big(e^{|x|} e^{|y|} - 1 \big)^n = \log\Big(\frac{1}{2 - e^{\|x\|+\|y\|}} \Big) < \infty,
\end{aligned}$$

ove l'ultima identità e la disuguaglianza finale valgono se $|e^{\|x\|+\|y\|} - 1| < 1$, ossia se

$$\|x\| + \|y\| < \log 2.$$

Questo dominio di convergenza fu trovato da Dynkin [36] (e da Bourbaki [18]).

L'idea della prova seguente -dovuta a Varadarajan [106]- che migliora il dominio di convergenza di cui sopra, nasce dalla ODE verificata da $Z(t) = \log(\exp(tX)\,\exp(tY))$, nel contesto più restrittivo delle algebre di Banach (che però fornisce l'idea vincente) ossia, si veda (24),

$$\dot{Z}(t) = X + Y + \tfrac{1}{2}[Z(t), Y - X] + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(\operatorname{Ad} Z(t))^{2p}(X+Y).$$

[6]Per definizione, un'*algebra di Banach-Lie* è uno spazio normato $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$ di Banach -reale o complesso- dotato di una struttura di algebra di Lie da un'operazione bilineare $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ che risulta continua (nelle ovvie topologie). Dunque esiste $M > 0$ tale che $\|[a,b]\| \le M\,\|a\| \cdot \|b\|$, per ogni $a, b \in \mathfrak{g}$; sostituendo la norma $\|\cdot\|$ con la norma equivalente $\|\cdot\|_* := M\,\|\cdot\|$, si ottiene una norma che verifica $\|[a,b]\|_* \le \|a\|_* \cdot \|b\|_*$ per ogni $a, b \in \mathfrak{g}$.

Procedendo euristicamente, una maggiorazione sul secondo membro di questa identità, fissata una costante ρ tale che $\|Y \pm X\| \le \rho$, porta a considerare la serie maggiorante

$$\rho \cdot \Big(1 + \tfrac{1}{2}\,\|Z\| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{B}_{2p}|}{(2\,p)!}\,\|Z\|^{2p}\Big).$$

Dunque, da una tecnica generale di ODE, se consideriamo il "problema maggiorante"

$$\dot W(t) = \rho \cdot \Big(1 + \tfrac{1}{2}\,W(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{B}_{2p}|}{(2\,p)!}\,(W(t))^{2p}\Big), \quad W(0)=0,$$

i coefficienti dello sviluppo di Maclaurin di W maggioreranno quelli dello sviluppo di $Z(t)$.

Teorema 3.5 (Improved Convergence of the CBHD Series)**.** *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Banach-Lie. Sia $\|\cdot\|$ una norma sub-moltiplicativa rispetto al bracket di $\mathfrak{g}$. Siano gli $Z_j(a,b)$ come in* (15)*.*

Allora, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} Z_j(a,b)$ converge totalmente su ogni insieme del tipo

$$D_\rho := \big\{(a,b) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \,:\, \|a\| + \|b\| \le \rho\big\}, \tag{25}$$

ove $\rho > 0$ è strettamente più piccolo della costante (universale!)

$$\delta = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,s}{2 + \frac{1}{2}\,s - \frac{1}{2}\,s\,\cot\big(\frac{1}{2}\,s\big)} \approx 2.173\ldots \tag{26}$$

Dimostrazione. Consideriamo la serie "maggiorante"

$$F(z) := 1 + \tfrac{1}{2}\,z + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{B}_{2p}|}{(2\,p)!}\,z^{2p}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Da risultati generali sul segno dei numeri di Bernoulli segue $|\mathbf{B}_{2p}| = (-1)^{p+1}\,\mathbf{B}_{2p}$. Ma allora

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + \tfrac{1}{2}\,z + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}\,\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,z^{2p} = 1 + \tfrac{1}{2}\,z - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,(i\,z)^{2p} \\ &\Big(\text{si ricordi che } \tfrac{x}{e^x-1} = 1 - \tfrac{x}{2} + \textstyle\sum_{p=1}^{\infty} \tfrac{\mathbf{B}_{2p}}{(2\,p)!}\,x^{2p}\Big) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\,z - \Big(\frac{iz}{e^{iz}-1} - 1 + \frac{iz}{2}\Big) = [\cdots] = 2 + \frac{z}{2} - \frac{z}{2}\,\frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}. \end{aligned}$$

Consideriamo allora l'ODE maggiorante (in $\mathbb{C}$)

$$y' = 2 + \tfrac{1}{2}\, y - \tfrac{1}{2}\, y \cot\left(\tfrac{1}{2}\, y\right), \quad y(0) = 0. \tag{27}$$

Essa ha una soluzione, sviluppabile in serie di potenze in un disco di centro 0 e raggio $\delta > 0$:

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\, z^n, \quad |z| < \delta. \tag{28}$$

Sostituendo questo sviluppo in (27) si ottiene immediatamente la formula ricorsiva per i γ_n:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1, \quad 2\,\gamma_2 = \frac{1}{2}\,\gamma_1, & \text{e, per } n \geq 2, \\ \gamma_{n+1} = \frac{1}{2\,(n+1)}\,\gamma_n + \displaystyle\sum_{\substack{p\geq 1,\ 2p\leq n \\ k_1,\dots,k_{2p}\geq 1,\ k_1+\cdots+k_{2p}=n}} & \dfrac{|\mathbf{B}_{2p}|}{(n+1)\,(2p)!}\,\gamma_{k_1}\cdots\gamma_{k_{2p}}. \end{cases} \tag{29}$$

Si osservi che i γ_n *sono tutti positivi.* La formula (29) è direttamente 'imparentata' con la formula ricorsiva per gli Z_j di cui in (16). È quindi immediato provare per induzione che, dati comunque $u, v \in \mathfrak{g}$ e posto $d := \|u\| + \|v\|$, si ha (si noti che $\|u \pm v\| \leq d$)

$$\|Z_j(u,v)\| \leq d^j\,\gamma_j, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Se ora $0 < \rho < \delta$ e se D_ρ è come in (25), ne segue

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(u,v)\in D_\rho} \|Z_j(u,v)\| \overset{(30)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(u,v)\in D_\rho} \gamma_j\,(\|u\|+\|v\|)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(u,v)\in D_\rho} \gamma_j\,\rho^j < \infty.$$

L'ultima disequazione segue da (28), essendo $\rho < \delta$.

Passiamo ora al calcolo di δ, dovuto a Newman, So, Thompson [77]. Essendo $\gamma_n \geq 0$, un risultato generale di variabile complessa (si veda ad esempio [103, Th. 7.21, pag. 214]) assicura che la singolarità di $y(z)$ -definita dalla serie di potenze in (28)- più prossima all'origine cade sul semiasse positivo delle ascisse. Possiamo dunque studiare la ODE (27) come equazione di una variabile reale. Essa è a variabili separabili e la soluzione $y(t)$ è definita implicitamente da

$$t = \int_0^{y(t)} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)}, \quad \text{ove } F(s) = 2 + \tfrac{1}{2}\, s - \tfrac{1}{2}\, s \cot\big(\tfrac{1}{2}\, s\big).$$

Uno studio qualitativo dell'equazione mostra che la soluzione è strettamente crescente e limitata in valore assoluto da 2π; inoltre il dominio massimale destro è del tipo $[0, \delta)$, con $\delta < \infty$ e $y(\delta-) = 2\pi$. Ne segue che δ è necessariamente dato da (26). $\square$

3.6. **Il Terzo Teorema di Lie in forma locale.** Grazie al Teorema CBHD, si può dare una prova molto semplice del Terzo Teorema di Lie in forma locale. Nel caso nilpotente, il risultato è globale:

Teorema 3.6 (Terzo Teorema di Lie per Algebre Nilpotenti)**.** *Sia* $\mathfrak{n}$ *un'algebra di Lie reale, nilpotente e di dimensione finita. Allora esiste un gruppo di Lie analitico, connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie è isomorfa a* $\mathfrak{n}$.

Dimostrazione. Basta considerare il gruppo $(\mathfrak{n}, \blacklozenge)$, ove $\blacklozenge$ è come in (19) (si noti che la serie si riduce ad una somma finita, in forza della nilpotenza di $\mathfrak{n}$). $\square$

Nel caso *non nilpotente*, grazie al Teorema CBHD si ottiene immediatamente un gruppo *locale* di algebra prescritta. Descriviamo brevemente la prova di questo fatto.

Ricordiamo dapprima alcuni risultati di base sui gruppi di Lie. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (pensata come l'algebra dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G). Denotiamo con N la dimensione di G (come varietà) e con e l'elemento neutro di G. È ben noto che $\mathfrak{g}$ può essere identificata a $T_e(G)$, lo spazio tangente a G in e. L'identificazione è data dall'isomorfismo

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G), \quad \alpha(X) := X_e.$$

L'usuale bracket di campi vettoriali $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ su $\mathfrak{g}$ viene tradotto da α in un bracket su $T_e(G)$ dalla formula

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_e := \alpha\Big(\big[\alpha^{-1}(\mathbf{u}), \alpha^{-1}(\mathbf{v})\big]_{\mathfrak{g}}\Big), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_e(G).$$

Ovviamente, $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ e $(T_e(G), [\cdot,\cdot]_e)$ *sono algebre di Lie isomorfe.* Sia ora (U, φ) una carta di G centrata in e. Ovviamente, una base di $T_e(G)$ è data da $\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_e, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\big|_e$, definite da

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_e f := \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_0 \big\{(f\circ\varphi^{-1})(y_1,\dots,y_N)\big\}, \qquad i=1,\dots,N,$$

ove $f : G \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione in $C^\infty(G,\mathbb{R})$. Denotiamo con m l'espressione coordinata della moltiplicazione di G vicino ad e (eventualmente rimpicciolendo U), ossia

$$m : \varphi(U)\times\varphi(U) \to \mathbb{R}^N, \qquad \begin{array}{c} m(\alpha,\beta) := \varphi\big(\varphi^{-1}(\alpha)\cdot\varphi^{-1}(\beta)\big) \\ \text{per ogni } \alpha,\beta\in\varphi(U). \end{array}$$

Usiamo infine la notazione $m=(m_1,\dots,m_N)$ per le funzioni componenti di m.

È un semplice esercizio di calcolo differenziale mostrare che *le costanti di struttura dell'algebra di Lie* $(T_e(G),[\cdot,\cdot]_e)$ *rispetto alla base* $\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_e,\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}\big|_e$ *sono date dalla formula:*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_e, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_e\right]_e = \sum_{h=1}^N \left(\frac{\partial^2 m_h(0,0)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} - \frac{\partial^2 m_h(0,0)}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_h}\Big|_e,$$

per ogni $i,j\in\{1,\dots,N\}$. Si noti come questo risultato mostri in modo quantitativo come le derivate miste dell'Hessiana di m in $(0,0)$ determinano completamente l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$

D'altra parte, è altrettanto ben noto che *due algebre di Lie (sul medesimo campo) sono isomorfe se e solo se hanno le stesse costanti di struttura.*[7]

Con i suddetti risultati, possiamo provare il Terzo Teorema di Lie in forma locale. Infatti, sia $\mathfrak{n}$ un'algebra di Lie reale tale che $N := \dim(\mathfrak{n}) < \infty$. La serie definita da $\blacklozenge$ in (19) converge in un intorno dell'origine di $\mathfrak{g}$. Si può altresì provare che essa definisce una struttura di gruppo locale su un intorno dell'origine di $\mathfrak{g}$ (si veda [13, Chapter 5]). Vediamo che forma assume l'operazione locale $\blacklozenge$, rispetto ad una fissata base $\mathcal{E}=\{E_1,\dots,E_N\}$ per $\mathfrak{n}$. A tal fine, sia $\varphi:\mathfrak{n}\to\mathbb{R}^N$ l'applicazione lineare definita da $\varphi(x_1\,E_1+\dots+x_N\,E_N) := (x_1,\dots,x_N)$ per ogni $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}$. Denotiamo con $c_{i,j}^k$ le costanti di struttura di $\mathfrak{n}$ rispetto ad $\mathcal{E}$, ossia $[E_i,E_j]_{\mathfrak{n}} = \sum_{k=1}^N c_{i,j}^k\,E_k$, per ogni

[7]Precisamente: *Siano* $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ *algebre di Lie (sul medesimo campo); allora* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *sono isomorfe come algebre di Lie se e solo se esiste una base* $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *per* $\mathfrak{g}$ *ed una base* $\mathcal{H}=\{h_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *per* $\mathfrak{h}$ *(indicizzate sullo stesso insieme* $\mathcal{I}$*) tali che*

$$c_{i,j}^k=\gamma_{i,j}^k \qquad \textit{per ogni } i,j,k\in\mathcal{I}, \textit{ ove} \qquad \begin{array}{l} [g_i,g_j]_{\mathfrak{g}} = \sum_{k\in\mathcal{I}} c_{i,j}^k\,g_k, \\ [h_i,h_j]_{\mathfrak{h}} = \sum_{k\in\mathcal{I}} \gamma_{i,j}^k\,h_k, \end{array} \qquad (i,j\in\mathcal{I}).$$

$i, j = 1, \dots, N$. Sia $m = (m_1, \dots, m_N)$ definita da

$$\Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i\, E_i\Big) \blacklozenge \Big(\sum_{j=1}^N \beta_j\, E_j\Big) = \sum_{k=1}^N m_k(\alpha, \beta)\, E_k.$$

Dobbiamo solo provare che si ha $c_{i,j}^k = \frac{\partial^2 m_k(0,0)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} - \frac{\partial^2 m_k(0,0)}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i}$, per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$. Ossia

Abbiamo ricondotto la prova del Terzo Teorema di Lie (locale)
ad un computo esplicito relativo alla serie di Dynkin!

Essendo $\xi \blacklozenge \eta = \xi + \eta + \frac{1}{2}\,[\xi, \eta]_{\mathfrak{n}} + \{\text{commutatori di altezze} \geq 3 \text{ in } \xi, \eta\}$, si deduce immediatamente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N m_k(\alpha, \beta)\, E_k &= \Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i\, E_i\Big) \blacklozenge \Big(\sum_{j=1}^N \beta_j\, E_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i\, E_i + \sum_{j=1}^N \beta_j\, E_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\, \beta_j\, [E_i, E_j]_{\mathfrak{n}} + \\
&\quad + \Big\{\text{brackets di altezze} \geq 3\Big\} = \sum_{k=1}^N \Big(\alpha_k + \beta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\, \beta_j\, c_{i,j}^k\Big)\, E_k + \{\cdots\}.
\end{aligned}$$

Da qui segue che (per $k = 1, \dots, N$)

$$m_k(\alpha, \beta) = \alpha_k + \beta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\, \beta_j\, c_{i,j}^k + \mathcal{O}(\|(\alpha, \beta)\|^3),$$

se $(\alpha, \beta) \to (0, 0)$. Ciò dimostra l'identità

$$\frac{\partial^2 m_k(0,0)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} - \frac{\partial^2 m_k(0,0)}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i} = \frac{1}{2}\, c_{i,j}^k - \frac{1}{2}\, c_{j,i}^k = c_{i,j}^k,$$

che è quanto volevamo provare.

4. Risultati recenti

4.1. **Legame col Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt e le algebre libere.** Ricordiamo le relative definizioni. Sia $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ un'algebra di Lie e sia $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ l'algebra tensoriale relativa (allo spazio vettoriale di $\mathfrak{g}$). Denotiamo con $\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ l'ideale bilatero di $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ generato dall'insieme

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x,y]_{\mathfrak{g}} \,:\, x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Allora l'algebra quoziente $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ è detta l'*algebra inviluppante universale di* $\mathfrak{g}$. Denotiamo con $\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ la relativa proiezione, ossia $\pi(t) = [t]_{\mathcal{J}}$. Denotiamo inoltre con

$$\mu : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \qquad \mu(x) := [x]_{\mathfrak{g}} \quad (x \in \mathfrak{g}),$$

la restrizione di π a $\mathfrak{g}$. Si prova immediatamente che μ è un morfismo di algebre di Lie, ossia

$$\mu([x,y]_{\mathfrak{g}}) = \mu(x)\mu(y) - \mu(y)\mu(x), \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathfrak{g}.$$

In altri termini, $\mu([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\mu(x), \mu(y)]_{\mathcal{U}}$. Il fatto notevole che μ è *iniettiva* (corollario del non triviale Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt) ha come conseguenza il fatto che una qualunque algebra di Lie si immerge in un'algebra associativa in cui il bracket ha la forma di "crochet". Si ha infatti il notevole:

Teorema 4.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Nelle notazioni di cui sopra, sia* $\mathfrak{g}$ *dotata di una base* $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$*, ove* $\mathcal{I}$ *è totalmente ordinato dalla relazione* $\preccurlyeq$*. Poniamo* $X_i := \mu(x_i)$*, per ogni* $i \in \mathcal{I}$*.*

Allora il seguente sistema forma una base per (lo spazio vettoriale) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*:*

$$1, \quad X_{i_1} \cdots X_{i_n}, \qquad \text{ove} \quad n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{I},\ i_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq i_n.$$

Nel seguito, il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt sarà abbreviato con PBW. (Apparentemente fino al 1956, tale teorema fu detto 'di Birkhoff-Witt': si vedano [93, 104] per i risultati storici.)

Ricordiamo ora anche la nozione di algebra di Lie libera (*free Lie algebra*, abbreviato con FLA) generata da un insieme X: *Sia* X *un insieme non vuoto e* $\mathbb{K}$ *un campo. Diciamo che* L *è un'algebra di Lie libera generata da* X *se vale il fatto seguente: Esiste una coppia* (L, φ)*, ove* L *è un'algebra di Lie su* $\mathbb{K}$ *e* $\varphi : X \to L$ *è una funzione, tale che, per ogni algebra di Lie* $\mathfrak{n}$ *su* $\mathbb{K}$ *e per ogni mappa* $f : X \to \mathfrak{n}$*, esiste uno ed un solo morfismo di* *algebre di Lie* $f^{\varphi}: L \to \mathfrak{n}$ *che estende* f. Quando $X \subset L$ e φ è l'iniezione canonica, diremo che L è un'algebra di Lie libera *sopra* X.

Il risultato fondamentale è che *per ogni insieme non vuoto* X*, esiste un'algebra di Lie libera generata da* X. Giacché due algebre di Lie libere generate da X sono canonicamente isomorfe, useremo la notazione $\mathrm{Lie}(X)$. Questo può essere dimostrato in modo facile *usando il Teorema PBW* oppure, in modo diretto, come viene fatto da Bourbaki [18] o da Reutenauer [88]. Invece, l'esistenza di un'algebra di Lie libera sopra X è provata in letteratura *usando il Teorema PBW.*

In [12], abbiamo provato che l'esistenza di un'algebra di Lie libera sopra X può anche essere provata **indipendentemente dal Teorema PBW**. Questo permette di ottenere una prova "circolare" dei seguenti risultati (si veda anche la Figura 1):

Teorema 4.2 (A. B., R. Fulci [12]). *Si considerino i seguenti asserti (qui* $\{a, b, c\}$ *ha cardinalità tre e tutte le strutture lineari sono da intendersi su uno stesso campo, di caratteristica nulla):*

(a) *L'insieme* $\{X_i\}_{i\in I}$ *è linearmente indipendente in* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
(b) *Ogni algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *si immerge nella sua algebra inviluppante* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
(c) *Per ogni* $X \neq \emptyset$*, esiste un'algebra di Lie libera sopra* X.
(d) FLA*: Per ogni* $X \neq \emptyset$*, esiste l'algebra di Lie libera* $\mathrm{Lie}(X)$ *generata da* X.
(e) *Esiste l'algebra di Lie libera sopra* $\{a, b, c\}$*, e vale il Teorema* CBHD.
(f) *Vale il Teorema* PBW.

Allora, questi risultati possono essere provati l'uno dall'altro nel modo seguente:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a).$$

Osserviamo che (c) *può essere provato senza alcun prerequisito ed indipendentemente dagli altri.*

4.2. **Domini di convergenza.** La letteratura relativa al Teorema CBHD degli ultimi trent'anni si è concentrata prevalentemente allo studio dei domini di (assoluta) convergenza di *varie presentazioni* della serie relativa a $\log(e^x e^y)$. Questo è un problema non banale e non ancora completamente risolto.

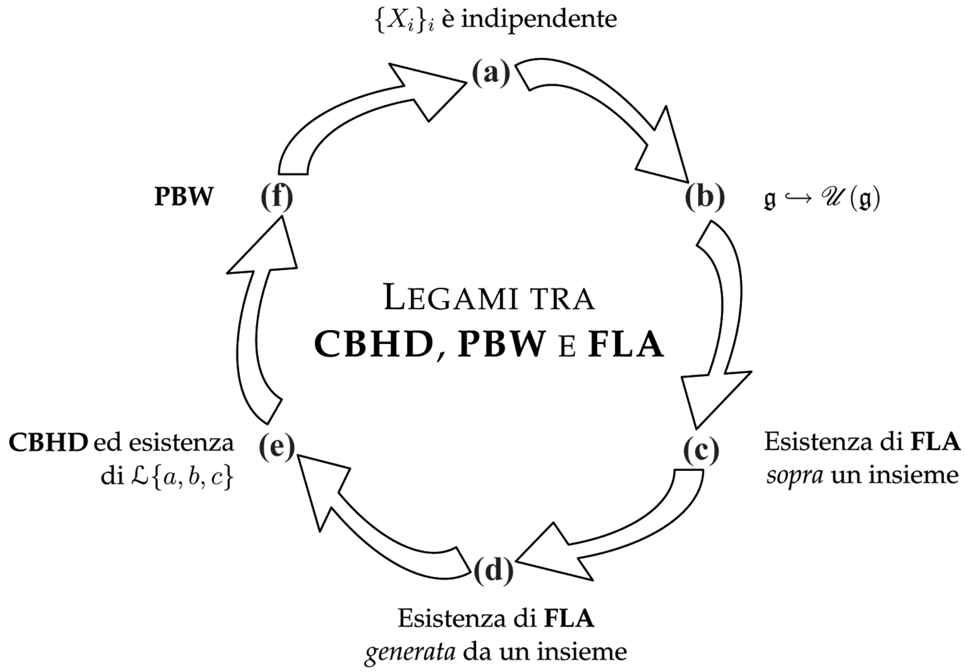

FIGURA 1. Figura relativa al Teorema 4.2.

Le presentazioni più studiate sono quella di Dynkin (19) e quelle cosiddette di Goldberg (una associativa e una in commutatori). La *presentazione associativa di Goldberg* si ottiene scrivendo la serie

$$\log(e^x e^y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\neq(0,0)} \frac{x^{h_1}y^{k_1}\cdots x^{h_n}y^{k_n}}{h_1!\cdots h_n!\,k_1!\cdots k_n!},$$

rispetto alla usuale base $\mathcal{W}$ dell'algebra dei polinomi $\mathcal{T}(\mathbb{Q}\langle x,y\rangle)$

$$1, \quad x,\ y, \quad x^2,\ xy,\ yx,\ y^2, \quad x^3,\ x^2y,\ xyx,\ xy^2,\ yx^2,\ yxy,\ y^2x,\ y^3, \quad \dots$$

Si noti infatti che nella serie di cui sopra, così come nella serie di Dynkin, lo stesso monomio può provenire da più scelte di indici.[8] Si ottiene così una serie del tipo

(31) $$\log(e^x e^y) = \sum_{w\in\mathcal{W}} g(w)\, w \qquad (g(w)\in\mathbb{Q}).$$

[8] Ad esempio x^2y proviene dalle scelte

$$n=1:\ (h_1,k_1)=(2,1) \quad \text{o} \quad n=2:\ (h_1,k_1)=(1,0),\ (h_2,k_2)=(1,1).$$

Applicando la mappa P del Lemma di Dynkin-Specht-Wever 3.1 si ottiene, a partire da (31), la *presentazione di Goldberg in commutatori*:

$$\log(e^x e^y) = \sum_{w \in \mathcal{W}} g(w) \, \frac{1}{\mathrm{lungh}(w)} \, [w].$$

La serie più studiata resta tuttavia la serie di CBHD in *componenti omogenee* (si osservi che termini della stessa omogeneità sono associati):

$$\log(e^x e^y) = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(x,y), \qquad Z_j(x,y) \in \mathcal{T}_j \cap \mathcal{L}. \tag{32}$$

Lo studio della convergenza *assoluta* di queste serie può dare risultati molto differenti: Ad esempio, per la convergenza assoluta delle serie (32), (31) e (19) i termini di grado due sono rispettivamente

$$\begin{aligned} &\text{dalla serie (32)}: && \tfrac{1}{2} \left\| xy - yx \right\|, \\ &\text{dalla serie (31)}: && \tfrac{1}{2} \left\| xy \right\| + \tfrac{1}{2} \left\| yx \right\|, \\ &\text{dalla serie (19)}: && \| xy - yx \|. \end{aligned}$$

Si noti infatti che in (31) operano molte cancellazioni:

$$\|x^2\| \left| \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \right| + \|xy\| \left| 1 - \tfrac{1}{2} \right| + \|yx\| \left| - \tfrac{1}{2} \right| + \|y^2\| \left| \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \right|,$$

e più ancora nella serie in termini omogenei. Più piccolo è invece il dominio di convergenza della serie maggiorante seguente (quella studiata da Dynkin e Bourbaki)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \sum_{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n) \neq (0,0)} \frac{\|x\|^{h_1} \|y\|^{k_1} \cdots \|x\|^{h_n} \|y\|^{k_n}}{h_1! \cdots h_n! \, k_1! \cdots k_n!},$$

come si capisce dai termini di altezza due: $\frac{1}{2} \|x\|^2 + \|x\| \, \|y\| + \frac{1}{2} \|y\|^2$.

Osservazione 4.1. Osserviamo esplicitamente che *la determinazione del miglior dominio di convergenza per la serie in componenti omogenee è ancora un* **problema aperto**, così come lo studio della convergenza *puntuale* (a parte il caso di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, dovuto a Michel [68]). Un prospetto dei migliori risultati di convergenza (alcuni sono del 2009) è dato in Figura 2. Essa va letta nel modo seguente:

Fig. A: Il miglior risultato di convergenza è stato ottenuto nel 2007 da Casas [24]: esso è relativo a spazi di Hilbert finito-dimensionali che sono anche algebre topologiche, come ad esempio l'algebra delle matrici dotate della norma di Frobenius $\|(a_{i,j})\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum |a_{i,j}|^2}$. Si noti che tale norma verifica $\|[A,B]\| \le 2\,\|A\| \cdot \|B\|$ e quindi non ha un comportamento ottimale rispetto alla struttura di algebra di Lie. Si vedano anche gli articoli del 2009 di Blanes, Casas, Oteo, Ros [9], Casas, Murua [25]. Il dominio $\|x\| + \|y\| < \pi$ qui rappresentato fornisce una condizione *necessaria e sufficiente* per norme verificanti la condizione $\|[A,B]\| \le 2\,\|A\| \cdot \|B\|$.

Fig. B: Come si vede dal caso di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (matrici reali 2×2 con traccia nulla) studiato già da Michel [68] nel 1974, i risultati attendibili sono migliori su algebre di Lie dotate di norme compatibili col bracket. Infatti il dominio di convergenza in Fig. B è da intendersi rispetto alla norma $\|A\| = \sqrt{2} \cdot \|A\|_{\mathrm{F}}$ che verifica -su $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$- la disuguaglianza $\|[A,B]\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Fig. C: In questa figura è rappresentato il dominio (finora trovato, possibilmente non ottimale) sui cui si verifica l'assoluta convergenza delle serie di Goldberg, sia quella associativa, sia in commutatori. Si veda Thompson [102], 1989. *Il miglior dominio non è ancora stato trovato.*

Fig. D: La Figura D è la più significativa: essa riguarda i domini trovati nel corso degli ultimi 30 anni (il risultato più recente è del 2007) *sufficienti* per la convergenza assoluta della serie di CBHD in componenti omogenee su un'algebra di Banach-Lie qualunque, dotata di una norma compatibile col bracket. Michel [68] ha dimostrato che fuori dal dominio $\|x\| + \|y\| < 2\pi$ non ci può essere convergenza, per una scelta qualunque di x, y. Gli altri domini sono dovuti a:

(d) $\|x\| + \|y\| < \log 2$: Dynkin [36] nel 1947; Bourbaki [18] nel 1972;

(c) $\|x\|, \|y\| < 1$: Thompson [102] nel 1989; Newman, So, Thompson [77] nel 1989.

(b) $\|x\| + \|y\| < \delta$, con δ come in (26): unendo i risultati di Varadarajan [106] del 1974 e di Newman, So, Thompson [77] del 1989. Si veda anche Day, So, Thompson [32] del 1991.

(a) l'unione dei due domini dal bordo "puntinato" è dovuto a Casas [24] nel 2007. Si vedano anche [9, 25, 72] del 2008-09.

Fig. E: Una panoramica dei risultati trovati su un'algebra di Banach (con una norma che verifica $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ e quindi tale che $\|[x,y]\| \le 2\,\|x\| \cdot \|y\|$). Per una bibliografia completa, si veda [13, Section 5.6]. Qui ci limitiamo ad osservare che la letteratura in quest'ultimo caso è molto vasta poiché i risultati di convergenza su algebre di Banach possono essere dedotti dai risultati di convergenza relativi alla **serie di Magnus**.

Ricordiamo cosa si intende per serie di Magnus [64] (per una esposizione esaustiva si veda Blanes, Casas, Oteo, Ros [9] e la bibliografia ivi contenuta). Nello studio della forma esponenziale $\exp(\Omega(t))$ in cui può essere rappresentata la soluzione $Y(t)$ del sistema lineare non autonomo $Y'(t) = A(t)Y(t)$, Magnus introdusse nel 1954 uno sviluppo in serie di $\Omega(t)$, detto anche *la Formula continua di Campbell-Baker-Hausdorff*. (Si veda anche Chen [26].) Infatti, la posizione $Y(t) = \exp(\Omega(t))$ trasforma l'equazione lineare $Y'(t) = A(t)Y(t)$ nella seguente equazione non-lineare per $\Omega(t)$

$$\Omega'(t) = \frac{\mathrm{Ad}\,\Omega(t)}{e^{\mathrm{Ad}\,\Omega(t)} - I}(A(t)).$$

Questa procedura ha senso in vari contesti, dalle algebre di matrici agli spazi di Hilbert o alle algebre di Banach. Aggiungendo la condizione iniziale $Y(0) = I$, allora $\Omega(0) = 0$ e l'usuale procedimento iterativo di Picard dà $\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(t)$, ove $\Omega_1(t) = \int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s$, e induttivamente per $n \ge 1$

$$\Omega_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{B}_j}{j!} \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \int_0^t [\Omega_{k_1}(s), [\Omega_{k_2}(s) \cdots [\Omega_{k_j}(s), A(s)] \cdots]]\,\mathrm{d}s.$$

Di fatto, in opportuni contesti la mappa $t \mapsto A(t)$ può anche essere discontinua (nel qual caso le relative ODE devono essere interpretate nel senso integrale di Volterra). Il caso più importante è quello in cui si prende

$$[0,2] \ni t \mapsto A(t) = \begin{cases} x, & \text{se } t \in [0,1], \\ y, & \text{se } t \in (1,2]. \end{cases}$$

In questo caso, la soluzione continua Y di $Y(t) = I + \int_0^t A(s)Y(s)\,\mathrm{d}s$ è

$$Y(t) = \begin{cases} e^{tx}, & \text{se } t \in [0,1], \\ e^{(t-1)y}e^{x}, & \text{se } t \in (1,2], \end{cases}$$

cosicché $Y(2) = e^y e^x$. Quindi, se vale la rappresentazione di Magnus $Y(t) = \exp(\Omega(t))$ e se lo sviluppo di cui sopra è convergente, la posizione $z := \Omega(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(2)$ verifica $e^z = Y(2) = e^y e^x$. Si noti che, per A di cui sopra, la rappresentazione degli Ω_n assicura che $\Omega_n(2)$ è un Lie-polinomio in x, y di lunghezza n. *Questo mostra il legame tra la serie di Magnus e quella di CBHD.*

Riferimenti bibliografici

1. Achilles, R., Bonfiglioli, A.: *The early proofs of the theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin*, submitted (2010)
2. Baker, H.F.: *On the exponential theorem for a simply transitive continuous group, and the calculation of the finite equations from the constants of structure*, Lond. M. S. Proc., **34**, 91–127 (1901)
3. Baker, H.F.: *Further applications of matrix notation to integration problems*, Lond. M. S. Proc., **34**, 347–360 (1902)
4. Baker, H.F.: *On the calculation of the finite equations of a continuous group*, London M. S. Proc., **35**, 332–333 (1903)
5. Baker, H.F.: *Alternants and continuous groups*, Lond. M. S. Proc., **(2) 3**, 24–47 (1905)
6. Bialynicki-Birula, I., Mielnik, B., Plebański, J.: *Explicit solution of the continuous Baker-Campbell-Hausdorff problem and a new expression for the phase operator*, Ann. Phys., **51**, 187–200 (1969)
7. Blanes, S., Casas, F.: *On the convergence and optimization of the Baker-Campbell-Hausdorff formula*, Linear Algebra Appl., **378**, 135–158 (2004)
8. Blanes, S., Casas, F., Oteo, J.A., Ros, J.: *Magnus and Fer expansions for matrix differential equations: The convergence problem*, J. Phys. A: Math. Gen., **22**, 259–268 (1998)
9. Blanes, S., Casas, F., Oteo, J.A., Ros, J.: *The Magnus expansion and some of its applications*, Phys. Rep., **470**, 151–238 (2009)
10. Bonfiglioli, A.: *An ODE's version of the formula of Baker, Campbell, Dynkin and Hausdorff and the construction of Lie groups with prescribed Lie algebra*, Mediterr. J. Math. **7**, 387–414 (2010)
11. Bonfiglioli, A.: *The contribution of Ernesto Pascal to the so-called Campbell-Hausdorff formula*, preprint (2010)
12. Bonfiglioli, A., Fulci, R.: *The equivalence of the theorems of Poincaré, Birkhoff, Witt and of Campbell, Baker, Hausdorff and the rôle of free Lie algebras*, submitted (2010)
13. Bonfiglioli, A., Fulci, R.: *Topics in Noncommutative Algebra. The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, pages LX+429, to appear (2011)
14. Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Lie groups constructed from Hörmander operators. Fundamental solutions and applications to Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, to appear in Communications on Pure and Applied Analysis.
15. Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *On left invariant Hörmander operators in $\mathbb{R}^N$. Applications to Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Journal of Mathematical Sciences, **171**, n.1, 22–33 (2010)
16. Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics **26**, New York, NY, Springer 2007
17. Bose, A. *Dynkin's method of computing the terms of the Baker-Campbell-Hausdorff series*, J. Math. Phys., **30**, 2035–2037 (1989)
18. Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique. Fasc. XXXVII: Groupes et Algèbres de Lie. Chap. II: Algèbres de Lie libres. Chap. III: Groupes de Lie*, Actualités scientifiques et industrielles, 1349. Paris: Hermann, 1972.
19. Campbell, J.E.: *On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups*, Lond. M. S. Proc., **28**, 381-390 (1897)

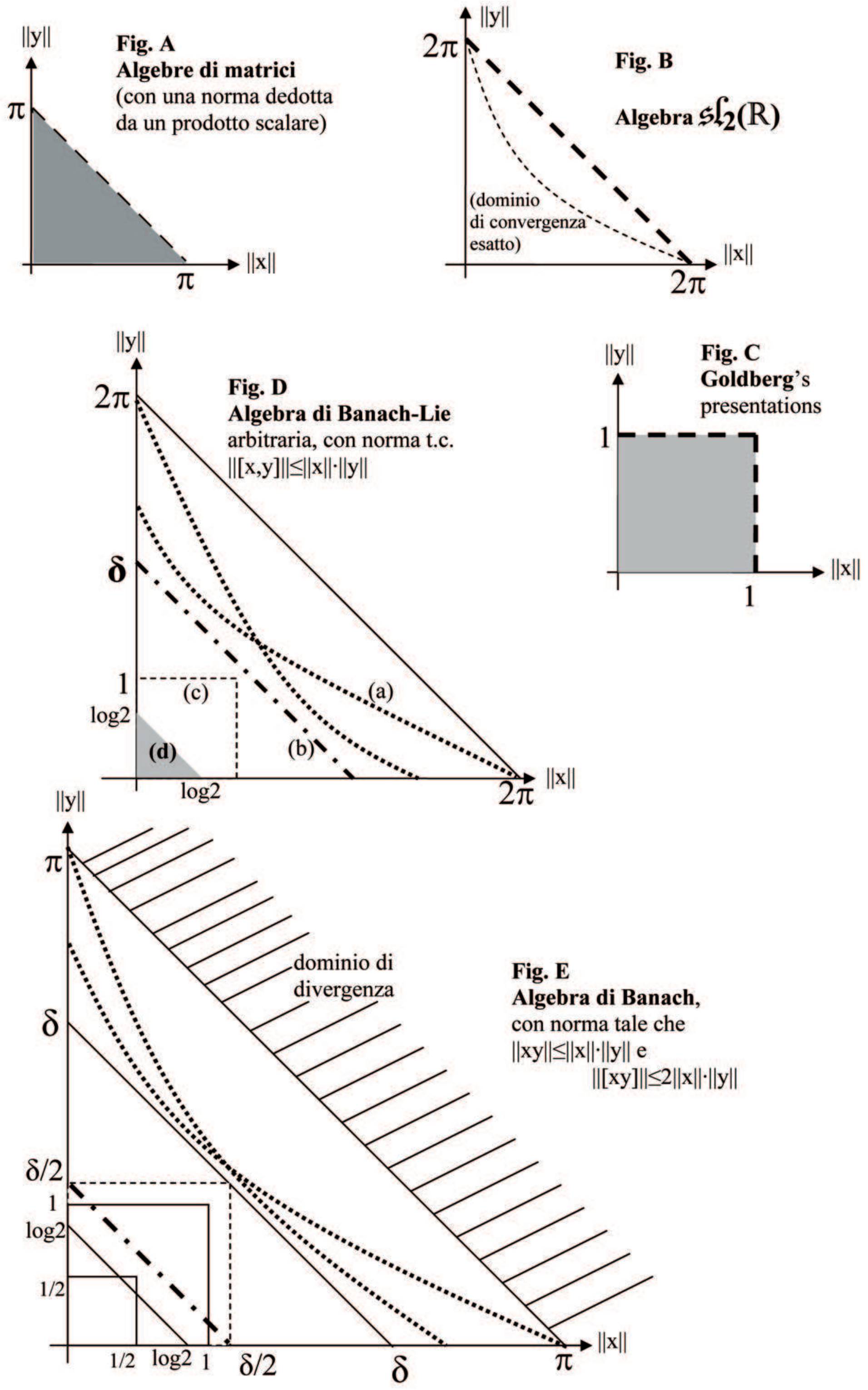

Figura 2. Risultati sulla convergenza (assoluta) della serie di CBHD in componenti omogenee (si veda l'Osservazione 4.1).

20. Campbell, J.E.: *Note on the theory of continuous groups*, American M. S. Bull., **4**, 407–408 (1897)
21. Campbell, J.E.: *On a law of combination of operators (second paper)*, Lond. M. S. Proc., **29**, 14–32 (1898)
22. Campbell, J.E.: *Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups*, Oxford: At the Clarendon Press, 1903
23. Cartier, P.: *Demonstration algébrique de la formule de Hausdorff.*, Bull. Soc. Math. France, **84**, 241–249 (1956)
24. Casas, F.: *Sufficient conditions for the convergence of the Magnus expansion*, J. Phys. A: Math. Theor., **40**, 15001–15017 (2007)
25. Casas, F., Murua, A.: *An efficient algorithm for computing the Baker-Campbell-Hausdorff series and some of its applications*, J. Math. Phys., **50**, 033513-1–033513-23 (2009)
26. Chen, K.-T.: *Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula*, Annals of Mathematics, **65**, 163–178 (1957)
27. Christ, M., Nagel, A., Stein, E.M., Wainger, S.: *Singular and maximal Radon transforms: Analysis and geometry*, Ann. of Math., **150**, 489–577 (1999)
28. Citti, G., Manfredini, M.: *Implicit function theorem in Carnot-Carathéodory spaces*, Commun. Contemp. Math., **8**, 657–680 (2006)
29. Cohn, P.M.: *Sur le critère de Friedrichs pour les commutateurs dans une algèbre associative libre*, C. R. Acad. Sci. Paris, **239**, 743-745 (1954)
30. Czichowski, G.: *Hausdorff und die Exponentialformel in der Lie-Theorie*, Sem. Sophus Lie, **2**, 85–93 (1992)
31. Czyż, J.: *Paradoxes of Measures and Dimensions Originating in Felix Hausdorff's Ideas*, World Scientific Publishing, 1994.
32. Day, J., So, W., Thompson, R.C.: *Some properties of the Campbell-Baker-Hausdorff series*, Linear and Multilinear Algebra, **29**, 207–224 (1991)
33. Djoković, D. Ž.: *An elementary proof of then Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin formula*, Math. Z., **143**, 209–211 (1975)
34. Dragt, A.J., Finn, J.M.: *Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps*, J. Math. Phys., **17**, 2215–2217 (1976)
35. Duistermaat J.J., Kolk J.A.C.: *Lie Groups*, Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
36. Dynkin, E.B.: *Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), **57**, 323–326 (1947)
37. Dynkin, E.B.: *On the representation by means of commutators of the series* $\log(e^x e^y)$ *for noncommutative* x *and* y (Russian), Mat. Sbornik (N.S.), **25** (67), 155–162 (1949)
38. Dynkin, E.B.: *Normed Lie algebras and analytic groups*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.), **5**, n.1(35), 135–186 (1950)
39. Dynkin, E.B.: *Selected papers of E.B. Dynkin with commentary*, Edited by A.A. Yushkevich, G.M. Seitz and A.L. Onishchik, American Mathematical Society: Providence, RI, 2000
40. Eichler, M.: *A new proof of the Baker-Campbell-Hausdorff formula*, J. Math. Soc. Japan, **20**, 23–25 (1968)
41. Eriksen, E.: *Properties of higher-order commutator products and the Baker-Hausdorff formula*, J. Math. Phys., **9**, 790–796 (1968)
42. Folland, G.B.: *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., **13**, 161–207 (1975)
43. Folland, G.B., Stein, E.M.: *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press, Princeton; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982
44. Friedrichs, K.O.: *Mathematical aspects of the quantum theory of fields. V Fields modified by linear homogeneous forces*, Comm. Pure Appl. Math., **6**, 1–72 (1953)
45. Gilmore, R.: *Baker-Campbell-Hausdorff formulas*, J. Math. Phys., **15**, 2090–2092 (1974)
46. Godement R.: *Introduction à la théorie des groupes de Lie. Tome 2*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1982
47. Gorbatsevich, V.V., Onishchik, A.L., Vinberg, E.B.: *Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups*, Springer: New York, 1997
48. Hairer, E., Lubich, Ch., Wanner, G.: *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 2006
49. Hausdorff, F.: *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*, Leipz. Ber., **58**, 19–48 (1906)
50. Hausner, M., Schwartz, J.T.: *Lie Groups. Lie Algebras*, Notes on Mathematics and Its Applications, Gordon and Breach: New York-London-Paris, 1968
51. Hochschild, G.P.: *The structure of Lie groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965

52. Hörmander, L.: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119**, 147–171 (1967)
53. Ince, E.L.: *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green & Co.: London, 1927 (reprinted by Dover Publications Inc.: New York 1956)
54. Iserles, A., Munthe-Kaas, H.Z., Nørsett, S.P., Zanna, A.: *Lie-group methods*, Acta Numer., **9**, 215–365 (2000)
55. Iserles, A., Nørsett, S.P.: *On the solution of linear differential equations in Lie groups*, Phil. Trans. R. Soc. A, **357**, 983–1019 (1999)
56. Jacobson, N.: *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **10**. New York - London: Interscience Publishers, John Wiley and Sons, 1962
57. Klarsfeld, S., Oteo, J.A.: *Recursive generation of higher-order terms in the Magnus expansion*, Phys. Rev. A, **39**, 3270–3273 (1989)
58. Klarsfeld, S., Oteo, J.A.: *The Baker-Campbell-Hausdorff formula and the convergence of Magnus expansion*, J. Phys. A: Math. Gen., **22**, 4565–4572 (1989)
59. Kobayashi, H., Hatano, N., Suzuki, M.: *Goldberg's theorem and the Baker-Campbell-Hausdorff formula*, Phys. A, **250**, 535–548 (1998)
60. Kolsrud, M.: *Maximal reductions in the Baker-Hausdorff formula*, J. Math. Phys., **34**, 270–286 (1993)
61. Kumar, K.: *On expanding the exponential*, J. Math. Phys., **6**, 1928–1934 (1965)
62. Lyndon, R.C:: *A theorem of Friedrichs*, Michigan Math. J., **3**, 27–29 (1955)
63. Magnani, V.: *Lipschitz continuity, Aleksandrov theorem and characterizations for H-convex functions*, Math. Ann., **334**, 199–233 (2006)
64. Magnus, W.: *A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside*, Ann. of Math., **52**, 111–126 (1950)
65. Magnus, W.: *On the exponential solution of differential equations for a linear operator*, Comm. Pure Appl. Math., **7**, 649–673 (1954)
66. Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D.: *Combinatorial Group Theory*, Interscience, New York, 1966
67. McLachlan, R.I., Quispel, R.: *Splitting methods*, Acta Numerica, **11**, 341–434 (2002)
68. Michel, J.: *Bases des algèbres de Lie et série de Hausdorff*, Séminaire Dubreil. Algèbre, **27** n.1 (1973-1974), exp. n.6, 1–9 (1974)
69. Michel, J.: *Calculs dans les algèbres de Lie libre: la série de Hausdorff et le problème de Burnside*, Astérisque, **38**, 139–148 (1976)
70. Mielnik, B., Plebański, J.: *Combinatorial approach to Baker-Campbell-Hausdorff exponents*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **12**, 215–254 (1970)
71. Moan, P.C.: *Efficient approximation of Sturm-Liouville problems using Lie-group methods*, Technical Report 1998/NA11, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, England, 1998
72. Moan, P.C., Niesen, J.: *Convergence of the Magnus series*, Found. Comput. Math., **8**, 291–301 (2008)
73. Moan, P.C., Oteo, J.A.: *Convergence of the exponential Lie series*, J. Math. Phys., **42**, 501–508 (2001)
74. Morbidelli, D.: *Fractional Sobolev norms and structure of Carnot-Carathèodory balls for Hörmander vector fields*, Studia Math., **139**, 213–242 (2000)
75. Murray, F.J.: *Perturbation theory and Lie algebras*, J. Math. Phys. **3**, 451–468 (1962)
76. Nagel, A., Stein, E.M., Wainger, S.: *Balls and metrics defined by vector fields I, basic properties*, Acta Math., **155**, 103–147 (1985)
77. Newman, M., So, W., Thompson, R.C.: *Convergence domains for the Campbell-Baker-Hausdorff formula*, Linear Multilinear Algebra, **24**, 301–310 (1989)
78. Oteo, J.A.: *The Baker-Campbell-Hausdorff formula and nested commutator identities*, J. Math. Phys., **32**, 419–424 (1991)
79. Pascal, E.: *Sopra alcune indentitá fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime*, Lomb. Ist. Rend. (2), **34**, 1062–1079 (1901)
80. Pascal, E.: *Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sulla dimostrazione del cosidetto secondo teorema fondamentale di Lie nella teoria dei gruppi*, Lomb. Ist. Rend. (2) **34**, 1118-1130 (1901)
81. Pascal, E.: *Sopra i numeri bernoulliani*, Lomb. Ist. Rend. (2), **35**, 377–389 (1902)
82. Pascal, E.: *Del terzo teorema di Lie sull'esistenza dei gruppi di data struttura*, Lomb. Ist. Rend. (2), **35**, 419–431 (1902)
83. Pascal, E.: *Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sul gruppo parametrico di un dato*, Lomb. Ist. Rend. (2), **35**, 555–567 (1902)
84. Pascal, E.: *I Gruppi Continui di Trasformazioni (Parte generale della teoria)*, Manuali Hoepli, Nr. 327 bis 328; Milano: Hoepli, **11**, 1903

85. Poincaré, H.: *Sur les groupes continus*, C. R. **128**, 1065–1069 (1899)
86. Poincaré, H.: *Sur les groupes continus*, Cambr. Trans., **18**, 220–255 (1900)
87. Poincaré, H.: *Quelques remarques sur les groupes continus*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **15**, 321–368 (1901)
88. Reutenauer, C.: *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs (New Series), **7**, Oxford 1993
89. Reinsch, M.W.: *A simple expression for the terms in the Baker-Campbell-Hausdorff series*, J. Math. Phys., **41**, 2434–2442 (2000)
90. Richtmyer, R.D., Greenspan, S.: *Expansion of the Campbell-Baker-Hausdorff formula by computer* Comm. Pure Appl. Math., **18**, 107–108 (1965)
91. Rothschild, L.P., Stein, E.M.: *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., **137**, 247–320 (1976)
92. Sagle, A.A., Walde, R.E.: *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Pure and Applied Mathematics, **51**, New York-London, Academic Press, 1973.
93. Schmid, W.: *Poincaré and Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), **6**, 175–186 (1982)
94. Schur, F.: *Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen*, Math. Ann., **35**, 161–197 (1890)
95. Schur, F.: *Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen*, Leipz. Ber., **42**, 1–7 (1890)
96. Schur, F.: *Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen*, Math. Ann., **38**, 263–286 (1891)
97. Schur, F.: *Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen*, Math. Ann., **41**, 509–538 (1893)
98. Serre, J.P.: *Lie algebras and Lie groups* 1964 Lectures given at Harvard University; 1st ed.: W.A. Benjamin, Inc., New York, 1965; 2nd ed.: Lecture Notes in Mathematics, **1500**, Berlin: Springer-Verlag, 1992.
99. Specht, W.: *Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren*, Math. Z., **51**, 367–376 (1948)
100. Suzuki, M.: *On the convergence of exponential operators–the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants*, Commun. Math. Phys., **57**, 193-200 (1977)
101. Thompson, R. C.: *Cyclic relations and the Goldberg coefficients in the Campbell-Baker-Hausdorff formula*, Proc. Amer. Math. Soc., **86**, 12–14 (1982)
102. Thompson, R. C.: *Convergence proof for Goldberg's exponential series*, Linear Algebra Appl., **121**, 3–7 (1989)
103. Titchmarsh, E.C.: *The Theory of Functions* (Second Edition), Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1932
104. Ton-That, T., Tran, T.D.: *Poincaré's proof of the so-called Birkhoff-Witt theorem*, Rev. Histoire Math., **5**, 249–284 (1999)
105. Tu, L.W.: *Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff*, J. Lie Theory, **14**, 501–508 (2004)
106. Varadarajan, V.S.: *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, reprint of the 1974 edition, Graduate Texts in Mathematics **102**, New York: Springer-Verlag, 1984.
107. Varopoulos, N.T., Saloff-Coste, L., Coulhon, T.: *Analysis and geometry on groups*, Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics **100**, Cambridge 1992
108. Veldkamp, F.D.: *A note on the Campbell-Hausdorff formula*, J. Algebra, **62**, 477–478 (1980)
109. Wei, J.: *Note on the global validity of the Baker-Hausdorff and Magnus theorems*, J. Mathematical Phys., **4**, 1337–1341 (1963)
110. Weiss, G.H., Maradudin, A.A.: *The Baker Hausdorff formula and a problem in Crystal Physics*, J.M.Phys., **3**, 771–777 (1962)
111. Wever, F.: *Operatoren in Lieschen Ringen*, J. Reine Angew. Math., **187**, 44–55 (1949)
112. Wichmann, E.H.: *Note on the algebraic aspect of the integration of a system of ordinary linear differential equations*, J. Math. Phys., **2**, 876–880 (1961)
113. Wilcox, R.M.: *Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics*, J. Math. Phys., **8**, 962–982 (1967)
114. Yosida, K.: *On the exponential-formula in the metrical complete ring*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **13**, 301–304 (1937); Collect. Papers Fac. Sci. Osaka Univ. A **5**, Nr. 40, (1937)