Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2009-10

Paolo Albano

Sulla Regolarità delle Soluzioni di Viscosità dell'Equazione Iconale

6 maggio 2010

Abstract

We study the regularity of a viscosity solution of equations of eikonal type in two different framework: we consider either the non-degenerate eikonal equation under low regularity assumptions on the data or a possibly degenerate eikonal equation with data having analytic regularity. Furthermore, we describe the structure of the singular set.

1. Introduzione e formulazione dei risultati

In un inseme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, consideriamo l'equazione iconale

$$\langle A(x)Du, Du\rangle = 1 \qquad \text{in} \qquad \Omega. \tag{1}$$

In tutto il seminario supporremo che la mappa $\Omega \ni x \mapsto A(x) \in \mathcal{S}^+$ sia almeno continua (il simbolo $\mathcal{S}^+$ denota l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ non-negative). Esistono varie definizioni di soluzione dell'equazione (1): soluzioni classiche (u è almeno differenziabile e soddisfa l'equazione in senso classico), soluzioni generalizzate (u è localmente lipschitziana e soddisfa l'equazione quasi ovunque), soluzioni di viscosità. Visto che vogliamo esaminare soluzioni non necessariamente differenziabili e visto che le soluzioni generalizzate non soddisfano, in mancanza di ipotesi aggiuntive, risultati di stabilità e di unicità (il limite uniforme di soluzioni generalizzate può non essere soluzione dell'equazione) prenderemo in esame soluzioni di viscosità dell'equazione (1). Ricordiamo la definizione di soluzione di viscosità.

Definizione 1.1. *Una funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una soluzione di viscosità dell'equazione (1) se, per ogni funzione ϕ di classe C^1 tale che $u - \phi$ abbia un minimo locale in x, si ha*

$$\langle A(x)D\phi(x), D\phi(x)\rangle = 1 \tag{2}$$

Alcune osservazioni:

(i) la Definizione 1.1 non è l'usuale definizione di soluzione di viscosità ma, nel caso di hamiltoniane convesse rispetto al gradiente, le due definizioni sono equivalenti (si veda, per esempio, [12]);

(ii) il limite uniforme, per $\varepsilon \downarrow 0$, di soluzioni classiche dell'equazione

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x) + \langle A(x)Du_\varepsilon, Du_\varepsilon\rangle = 1$$

è una soluzione di viscosità dell'equazione (1). Le denominazione "soluzione di viscosità deriva da quest'ultima proprietà.

(iii) La Definizione 1.1 privilegia la concavità rispetto alla convessità.

Per chiarire il punto (iii) basta considerare l'equazione (in una variabile) $|u'(x)| = 1$ in $]-1,1[$, $u(\pm 1) = 0$. La precedente definizione di soluzione di viscosità seleziona la soluzione $u(x) = 1 - |x|$ scartando, ad esempio, la soluzione generalizzata $-1 + |x|$.

I risultati di regolarità che descriveremo in questo seminario si basano sull'uso di appropriate formule di rappresentazione. Per chiarire meglio quest'idea consideriamo come problema modello il caso in cui $A(x) \equiv I$ e supponiamo che Ω sia un aperto limitato. Sia u una soluzione di viscosità dell'equazione

$$|Du|^2 = 1 \qquad \text{in} \qquad \Omega. \tag{3}$$

Dato un aperto $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ si ha che

$$u(x) = \inf\{|x-y| + u(y) \mid y \in \partial\Omega_1\}, \qquad (x \in \Omega_1). \tag{4}$$

Dalla formula di rappresentazione (4) immediatamente si ricava che se x varia in un insieme a distanza positiva da $\partial\Omega_1$ allora u è l'estremo inferiore di funzioni di classe C^∞ con norma $C^{1,1}$ uniformemente limitata. Osserviamo che non stiamo facendo alcuna ipotesi sulla regolarità delle frontiere di Ω e di Ω_1. Da una tale formula di rappresentazione si deduce che u può avere punti di non-differenziabilità ma che il grafico di u non può incurvarsi troppo "verso l'alto".

Tenendo a mente il precedente esempio, il primo problema che consideriamo consiste nello studio della regolarità (locale) di una soluzione di viscosità dell'equazione (1). È opportuno distinguere il caso di iconale non-degenere, $A(\cdot) > 0$, da quello di un'iconale degenere, $A(\cdot) \geq 0$.

Regolarità Locale delle Soluzioni dell'Equazione Iconale non-degenere. Supponiamo che esista $\lambda \in]0,1]$ tale che

$$\lambda |p|^2 \leq \langle A(x)p, p\rangle \leq \frac{1}{\lambda}|p|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

È ben noto che se l'equazione iconale è non-degenere tutte le (sotto-)soluzioni di viscosità sono localmente lipschitziane (si veda, ad esempio, [12]). D'altra parte, in generale, ci si aspetta di non avere soluzioni differenziabili. Per definire che cosa si intende con la frase "il grafico di u non può incurvarsi troppo verso l'alto". Ricordiamo la seguente

Definizione 1.2. *Una funzione continua u è semiconcava in Ω se esiste una costante reale C tale che $D^2u \le CI$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Inoltre, u è localmente semiconcava in Ω se è semiconcava in ogni $U \subset\subset \Omega$. Analogamente, diremo che u è semiconvessa se $-u$ è semiconcava.*

In particolare, una funzione semiconcava si può rappresentare (localmente) come una somma di una funzione concava con una funzione di classe $C^{1,1}$. Da quest'ultimo fatto si deduce immediatamente che una funzione semiconcava è localmente lipschitziana.

Consideriamo il seguente problema:

($\mathcal{P}$) trovare una classe di matrici $\mathcal{A}$ tale che tutte le soluzioni di viscosità dell'equazione (1) siano localmente semiconcave in Ω.

Nel caso $n = 1$, il prossimo risultato fornisce una soluzione completa del Problema ($\mathcal{P}$).

Teorema 1.1 ([3])**.** *Siano I un intervallo aperto connesso ed $a : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $a \ge \lambda > 0$ in I. Consideriamo l'equazione*

$$a(x)\left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 = 1 \quad in \quad I\,. \tag{6}$$

Allora tutte le soluzione di viscosità dell'equazione (6) sono semiconcave in I se e solo se la funzione a è lipschitziana in I.

Tranne che nel caso $n = 1$, il fatto che la matrice $A(x)$ dipenda con regolarità lipschitziana da x e che $A(\cdot)$ sia non-degenere non implica la semiconcavità locale delle soluzioni di (1). Ad esempio, la funzione $u(x_1, x_2) = x_1 + (2/3)|x_2|^{\frac{3}{2}}$ risolve l'equazione

$$(1 - |x_2|)(\partial_{x_1} u(x_1, x_2))^2 + (\partial_{x_2} u(x_1, x_2))^2 = 1. \tag{7}$$

In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 - |x_2| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è lipschitziana e non-degenere vicino l'origine ma u non è semiconcava in un intorno di un punto della forma $(x_1, 0)$.

Osserviamo che il prcedente esempio è in accordo con il risultato in [22]. Infatti, in [22] si dimostra che se u è una soluzione di viscosità di un'equazione delle forma

$H(x, u(x), Du(x)) = 0$ con $H(x, u, p)$ lipschitziana rispetto alle variabili (x, u) e strettamente convessa in p allora u è semiconcava in senso generalizzato[1].

L'esempio (7) ed il metodo introdotto da Kruzhkov in [20] suggeriscono che la semiconcavità di u sia correlata alla semiconvessità della hamiltoniana,

$$H(x, p) = \langle A(x)p, p \rangle - 1,$$

rispetto alle variabili x.

Più precisamente, supponiamo che H sia localmente semiconvessa in Ω uniformemente rispetto a p, $|p| = 1$, ossia per ogni $U \subset\subset \Omega$ esista $C > 0$ tale che, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ con $|p| = 1$,

$$D_x^2 H(x, p) \geq -CI \qquad \text{in} \qquad \mathcal{D}'(U) \,. \tag{8}$$

Osserviamo che, l'ipotesi (8) non implica la differenziabilità della hamiltoniana rispetto alle variabili x. È facile costruire esempi soddisfacenti la condizione (8): sia $B(x)$ una famiglia di matrici definite positive con coefficienti di classe $C^{1,1}$ e sia $D(x)$ una matrice diagonale avente sulla diagonale funzioni convesse non-negative. Allora $(B + D)(\cdot)$ è non-degenere e $H(x, p) := \langle [B(x) + D(x)]p, p \rangle - 1$ soddisfa l'ipotesi (8). Il principale risultato di questa sezione è il seguente

Teorema 1.2 ([3])**.** *Sia $A(\cdot)$ non-degenere in Ω e supponiamo che valga l'ipotesi (8). Allora ogni soluzione di viscosità dell'equazione (1) è localmente semiconcava in Ω.*

Una conseguenza immediata del Teorema 1.2 è il seguente

Corollario 1.1 ([3])**.** *Sia $A(\cdot)$ non-degenere in Ω e supponiamo che valga l'ipotesi (8) e che u sia differenziabile in una palla $B \subset \Omega$. Allora $u \in C^{1,1}(B)$.*

[1]Ricordiamo che una funzione continua u definita in un insieme convesso Ω è semiconcava in senso generalizzato se per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni $t \in [0, 1]$, si ha

$$tu(x) + (1 - t)u(y) - u(tx + (1 - t)y) \leq t(1 - t)|x - y|\omega(|x - y|) \,.$$

La funzione $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ è non decrescente, continua in 0 e $\omega(0) = 0$. Osserviamo che nel caso dell'equazione (7), utilizzando il risultato contenuto in [22], si ottiene semiconcavità con modulo tipo radice quadrata, $\omega(r) = C\sqrt{r}$. Applicando il risultato contenuto [22] non si ottiene in alcun caso semiconcavità del tipo studiato nel presente seminario, ossia con modulo $\omega(r) = Cr$.

Regolarità Locale delle Soluzioni dell'Equazione Iconale degenere. Gli unici risultati di regolarità locale per soluzioni di viscosità di equazioni iconali degeneri sono quelli contenuti in [14] (si veda anche [15]). Siano $X_1, \dots, X_N$ campi vettoriali di classe C^∞ in Ω. Supponiamo che i campi $X_1, \dots, X_N$ soddisfino la condizione di Hörmander con commutatori di lunghezza $\leq k$. In [14] (nel caso $k = 2$, per il caso generale si veda [15]) si prova il seguente

Teorema 1.3 ([14] & [15]). *Tutte le (sotto-)soluzioni di viscosità, continue, dell'equazione*

$$\sum_{j=1}^{N} (X_j u)^2 = 1$$

sono hölderiane di esponente $1/k$.

Il Problema di Dirichlet omogeneo caso non-degenere: bassa regolarità. Siano $\Omega \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \mathbb{R}^n$ due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia u la soluzione di viscosità dell'equazione

$$\begin{cases} \langle A(x)Du, Du \rangle = 1 \qquad \text{in} \qquad \Omega \\ \\ u(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Definizione 1.3. *Diremo che* Ω *soddisfa la condizione di sfera esterna se esiste* $\rho > 0$ *tale che per ogni* $x \in \partial\Omega$ *esiste* $z \in \Omega_1 \setminus \Omega$ *tale che* $x \in \partial B_\rho(z)$ *e* $\overline{B}_\rho(z) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

Si ha il seguente risultato di estensione.

Teorema 1.4 ([4]). *Supponiamo che le matrici* $A(x)$ *siano non-degeneri e dipendano con regolarità* $C^{1,1}$ *da* x, *per* $x \in \Omega_1$. *Sia* u *la soluzione di viscosità dell'equazione* (9). *Allora esistono un intorno di* Ω, Ω', *ed una funzione continua* $\overline{u} : \Omega' \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\langle A(x)D\overline{u}, D\overline{u} \rangle = 1 \quad \text{in } \Omega' \qquad \text{e} \qquad \overline{u}\Big|_{\Omega} = u$$

se e solo se Ω *soddisfa la condizione di sfera esterna.*

Il seguente risultato di regolarità è una conseguenza immediata dei Teoremi 1.2 e 1.4.

Teorema 1.5 ([4])**.** *Nelle ipotesi del Teorema 1.4, supponiamo che Ω soddisfi la condizione di sfera esterna. Allora u è semiconcava in Ω.*

Il precedente risultato si applica allo studio delle singolarità alla frontiera delle soluzioni dell'equazione iconale (si vedano [2] e [4]).

Il Problema di Dirichlet omogeneo caso non-degenere: alta regolarità.

In questa sezione supponiamo di avere regolarità analitica dei dati e consideriamo un'equazione iconale non-degenere. Iniziamo con il ricordare la definizione di funzione subanalitica

Definizione 1.4. *Sia M una varietà reale analitica di dimensione finita. $A \subset M$ è un sottoinsieme semianalitico se per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x in M e $2pq$ funzioni analitiche g_{ij}, h_{ij}, $1 \le i \le p$ e $1 \le j \le q$, tali che*

$$A \cap U = \sum_{i=1}^{p} \{y \in U \mid g_{ij}(y) = 0 \ \text{e} \ h_{ij}(y) > 0, j = 1, \dots, q\}.$$

Un sottoinsieme $A \subset M$ è subanalitico se per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x in M e $2p$ coppie (Φ_j^k, A_j^k), $1 \le j \le p$ e $k = 1, 2$, con $A_j^k \subset M_j^k$ semianalitico (M_j^k sono varietà reali analitiche), e delle mappe analitiche proprie $\Phi_j^k : M_j^k \to M$ tali che

$$A \cap U = \cup_{i=1}^{p} [\Phi_i^1(A_i^1) \setminus \Phi_i^2(A_i^2)].$$

Per finire, una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è subanalitica se il suo grafico è un sottoinsieme subanalitico di $M \times \mathbb{R}$.

Supponiamo che valga la seguente ipotesi

(H) sia $A(x)$ una matrice $n \times n$ con $x \mapsto A(x)$ analitica reale.

Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo

$$(10) \qquad \begin{cases} \langle A(x)Du, Du \rangle = 1 & \text{in} \quad \Omega \\ \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Vale allora il seguente risultato di regolarità:

Teorema 1.6 ([23], [6]). *Nell'ipotesi (H), sia Ω un aperto limitato con frontiera reale analitica. Allora, la soluzione di viscosità di* (10) *è subanalitica.*

Il Problema di Dirichlet omogeneo caso degenere.

Per semplicità in questa sezione ci limiteremo a descrivere un risultato di subanaliticità per il caso dell'equazione iconale associata ad un operatore degenere di tipo Grushin (per risultati più generali si vedano i lavori [6] e [23]). Useremo le seguenti notazioni

$$x = (x', x_n), \quad x' = (x^1, \dots, x^{n-1}),$$

e, per $k \in \mathbb{N}$,

$$[x']_k^{2k} = \sum_{j=1}^{n-1} (x^j)^{2k}$$

Consideriamo l'equazione iconale

$$\begin{cases} |D_{x'}u|^2 + [x']_k^{2k}(\partial_{x^n}u)^2 = 1 \qquad \text{in} \qquad \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{in} \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Ricordiamo che la frontiera $\partial\Omega$ è non-caratteristica per l'equazione (11) se, per ogni $x \in \partial\Omega$,

$$|\nu'(x)|2 + [x']_k^{2k}(\nu^n(x))^2 \neq 0,$$

$(\nu'(x), \nu^n(x))$ è il vettore unitario normale esterna a $\partial\Omega$ nel punto x. Si ha allora il seguente

Teorema 1.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato con frontiera non-caratteristica reale analitica. Allora, la soluzione di viscosità di* (11) *è subanalitica e lipschitziana in $\overline{\Omega}$.*

Osserviamo che

- i campi vettoriali $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^{n-1}}$, $(x^1)^k\partial_{x^n}, \dots, (x^{n-1})^k\partial_{x^n}$ soddisfano la condizione di Hörmander con commutatori di lunghezza $k+1$;
- nell'enunciato del Teorema 1.7 non appare la lunghezza $k+1$.

Consideriamo il caso $k = 1$ e sia l'insieme Ω della forma

$$\Omega = \{(x', x^n) \mid x^n > M|x'|^2\}, \qquad M > 0. \tag{12}$$

Allora vale il

Teorema 1.8 ([5]). *Esiste un'unica soluzione di viscosità u non-negativa dell'equazione* (11) *(con $k = 1$ ed Ω come in (12)). Inoltre u è localmente lipschitziana in Ω ed hölderiana di esponente* $1/2$ *nel punto caratteristico* $(0,0) \in \partial\Omega$.

2. Singolarità delle soluzioni dell'equazione iconale

In questa sezione descriveremo brevemente alcuni risultati che si possono dedurre sulla struttura dell'insieme singolare delle soluzioni di equazioni di tipo iconale. Alcuni risultati non sono altro che dei teoremi di struttura: seguono dal solo fatto che, in caso di iconale non-degenere con "bassa" regolarità dei dati, la soluzione u dell'equazione iconale è semiconcava oppure u è una funzione subanalitica (in caso di regolarità analitica dei dati).

Singolarità di funzioni semiconcave. Ricordiamo che se u è una funzione localmente semiconcava in Ω allora il suo insieme singolare,

$$\Sigma(u) = \{x \in \overline{\Omega} \,:\, u \text{ non è differenziabile in } x\},$$

è $(n-1)$ numerabilmente rettificabile (in altre parole, $\Sigma(u)$ può essere ricoperto dai grafici di un numero numerabile di funzione lipschitziane definite in $\mathbb{R}^{n-1}$). Risultati di rettificabilità dell'insieme singolare sono stati provati da vari autori con diversi gradi di generalità si veda, ad esempio, [25], [9] e [7]. Si hanno anche stime dal basso per la dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare (si veda [10] e [8]). Per quel che riguarda le singolarità al bordo vale la seguente caratterizzazione.

Teorema 2.1 ([4]). *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 1.5. Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Allora $x_0 \notin \Sigma(u)$ se e solo se $\partial\Omega$ è differenziabile in x_0.*

Inoltre si può mostrare che la componente connessa dell'insieme singolare, $\Sigma(u)$, contenente $x_0 \in \partial\Omega \cap \Sigma(u)$ "entra" dentro l'insieme Ω. Più precisamente vale il seguente

Teorema 2.2 ([2]). *Sia Ω convesso e sia $x_0 \in \Sigma(u) \cap \partial\Omega$. Allora esiste un numero positivo σ ed una curva lipschitziana (non costante) $\gamma : [0,\sigma] \to \Sigma(d)$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(s) \in \Omega$ per ogni $s \in]0,\sigma]$.*

Singolarità di funzioni subanalitiche.

Definiamo

$$\mathcal{C}ut(u) = \{x \in \Omega \mid u \text{ non è reale analitica in } x\}.$$

Ricordiamo la definizione di stratificazione analitica.

Definizione 2.1. *Per stratificazione analitica di un insieme $S \subset \Omega$ si intende una decomposizione localmente finita*

$$S = \cup_{j=1}^{\nu} V_j,$$

per un certo $\nu \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, in un'unione disgiunta di varietà analitiche connesse V_j (gli strati di S) tali che dim $V_j \leq n-1$ e se $\overline{V}_j \cap V_k \neq \emptyset$ allora $V_k \subset \overline{V}_j$ e dim $V_k \leq$ dim $V_j - 1$.

Vale il seguente teorema di struttura:

Teorema 2.3 ([23])**.** *Sia u una funzione subanalitica. Allora $\mathcal{C}ut(u)$ ammette una stratificazione analitica.*

Osserviamo che il precedente risultato fornisce una descrizione dell'insieme delle singolarità della soluzione dell'equazione iconale nelle ipotesi dei Teoremi 1.6 e 1.7. Inoltre, si ha che, in entrambi i casi, la stratificazione ha un numero finito di strati, $\nu < \infty$ (infatti la soluzione dell'iconale è regolare nell'intorno dei punti di bordo non-caratteristici, si veda [1]).

Osservazione 2.1. *Nelle ipotesi del Teorema 1.8, si ha che la soluzione di viscosità non-negativa non è differenziabile in un insieme composto di due strati l'origine $(0,0)$ e l'asse dell'insieme Ω, $\{(0,x^n) \mid x^n > 0\}$. In altre parole, l'insieme delle singolarità tocca la frontiera nel punto caratteristico.*

3. Formule di rappresentazione

In questa sezione descriveremo le linee essenziali delle dimostrazioni dei Teoremi (di regolarità) 1.2, 1.6 e 1.7.

Dimostrazione del Teorema 1.2.

La dimostrazione del teorema si fonda su un'idea della meccanica classica (si veda [11]) descrivere una soluzione dell'equazione (1) mediante una formula di rappresentazione variazionale. Nel contesto delle soluzioni di viscosità tale idea è stata utilizzata in [21], [19] (si veda anche [22]). Come usuale, data la hamiltoniana

$$H(x,p) = \langle A(x)p, p\rangle - 1$$

la lagrangiana associata ad H è la trasformata di Legendre di H:

$$L(x,q) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} [\langle q,p\rangle - H(x,p)] \qquad (x \in \Omega)\,.$$

Il primo risultato mette in relazione la semiconvessità della hamiltoniana H con la semiconcavità della lagrangiana L.

Lemma 3.1. *Sia A nondegenere in Ω. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(*i*) *$H(x,p)$ è localmente semiconvessa in Ω uniformemente rispetto a p, $|p| = 1$;*

(*ii*) *$L(x,q)$ è localmente semiconvessa in Ω uniformemente rispetto a q, $|q| = 1$.*

Sia u una soluzione di viscosità dell'equazione (1) e sia $B_\rho(y) \subset\subset \Omega$. Consideriamo il problema di Dirichlet non-omogeneo

$$\begin{cases} \langle A(x)Dv(x), Dv(x)\rangle = 1 & \text{in} \quad B_\rho(y) \\ \\ v = u & \text{on} \quad \partial B_\rho(y). \end{cases} \tag{13}$$

Sia $C(x,t;z,0)$ l'insieme di tutte le funzioni assolutamente continue $\gamma : [0,t] \to \Omega$ tali che $\gamma(t) = x$ e $\gamma(0) = z$. Poniamo

$$(14) \quad d_H(x,z) =$$
$$\inf\left\{\int_0^t L(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds \;:\; t>0, \gamma \in C(x,t;z,0)\right\} =$$
$$\inf\left\{t + \frac{1}{4}\int_0^t \langle A^{-1}(\gamma(s))\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle\,ds \;:\; t>0, \gamma \in C(x,t;z,0)\right\}.$$

Allora

Teorema 3.1 ([21],[19])**.** *Sia A non-degenere e continua in Ω. Allora per ogni $z \in \Omega$, $d_H(\cdot, z)$ è una soluzione di viscosità dell'equazione*

$$\langle A(x)Du(x), Du(x)\rangle = 1 \quad \textit{in} \quad \Omega \setminus \{z\}. \tag{15}$$

Inoltre la soluzione del Problema (13) si può rappresentare come

$$v(x) = \inf_{z \in \partial B_\rho(y)} [d_H(x, z) + u(z)] \qquad (x \in B_\rho(y)).$$

La verifica della locale semiconcavità di u in Ω si riduce a mostrare che, per un certo $\rho' \in]0, \rho[$, la funzione $d_H(\cdot, z)$ è semiconcava in $B_{\rho'}(y)$, per ogni $z \in \partial B_\rho(y)$. Il Lemma 3.1 permette di maggiorare $d_H(x+h, z) + d_H(x-h, z) - 2d_H(x, z)$ con $|h|^2$ (modulo costanti) e di completare la dimostrazione.

Dimostrazione dei Teoremi 1.6 e 1.7.

Anche le dimostrazioni dei Teoremi 1.6 e 1.7 si fondano su di un'opportuna formula di rappresentazione della soluzione dell'equazione (10) (o (11)). Per mettere in relazione le soluzioni dell'equazione iconale con le funzioni subanalitiche ricordiamo il seguente risultato.

Teorema 3.2 ([6])**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso con frontiera reale analitica e sia $v : \overline{\Omega} \times [0, \varepsilon_*] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, reale analitica in $\Omega \times]0, \varepsilon_*[$ (ε_* è un numero positivo). Definiamo*

$$d(x) = \inf_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]} v(x, \varepsilon) \qquad (x \in \overline{\Omega}).$$

Allora v è una funzione subanalitica in $\overline{\Omega}$.

L'idea della dimostrazione dei Teoremi 1.6 e 1.7 consiste nel considerare le equazioni "approssimanti"

$$\begin{cases} -\varepsilon L u + \langle A(x)Du, Du\rangle = 1 \qquad \text{in} \quad \Omega \\ \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

dove

$$L(x, D)u(x) = \text{ tr } [A(x)D^2u(x)].$$

Denotiamo con il simbolo $u(x,\varepsilon)$ la soluzione dell'equazione (16). Nelle ipotesi del Teorema 1.6 (o nelle ipotesi del Teorema 1.7) si può mostrare che valgono i seguenti fatti

(1) esiste $\varepsilon_* > 0$ tale che il problema di Dirichlet (16) ha una soluzione classica continua in $\overline{\Omega}$;

(2) per ogni $a \in]0,\varepsilon_*[$ e per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste un intorno V di x_0, $V \subset\subset \Omega$, ed una costante $C > 0$ tale che per ogni $(x,\varepsilon) \in V \times]a,\varepsilon_*[$, $|\partial^\alpha u(x,\varepsilon)| \le C^{|\alpha|+1}|\alpha|!$;

(3) esiste $c > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in]0,\varepsilon_*]$,

$$[u]_1 = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x,\varepsilon) - u(y,\varepsilon)|}{|x-y|} \le c;$$

(4) $\|u(\cdot,\varepsilon) - u(\cdot,\varepsilon')\|_{L^\infty} \le c\sqrt{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon' \le \varepsilon \le \varepsilon_*$.

Osservazione 3.1. *La proprietà (2) si fonda sul fatto che l'operatore L, nelle situazioni in esame, è ipoellittico analitico.*

Dalle precedenti proprietà si ottiene la

Proposizione 3.1 ([6])**.** *La soluzione dell'equazione* (16)*, $u(x,\varepsilon)$, è reale analitica rispetto alle variabili (x,ε) in $\Omega\times]0,\varepsilon_*[$.*

Passando al limite, per $\varepsilon' \to 0$, in (3) troviamo che

$$\|u(\cdot,\varepsilon) - u(\cdot)\|_{L^\infty} \le c\sqrt{\varepsilon} \qquad \varepsilon \in]0,\varepsilon_*]$$

($u(\cdot)$ denota la soluzione di viscosità dell'equazione iconale). Quindi si ottiene la formula di rappresentazione

$$u(x) = \inf_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]} [u(x,\varepsilon) + c\sqrt{\varepsilon}] \qquad x \in \Omega.$$

Visto che, per la Proposizione 3.1, la funzione $u(x,\varepsilon) + c\sqrt{\varepsilon}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.2 concludiamo che u è una funzione subanalitica.

Riferimenti bibliografici

[1] P. Albano. *On the regularity near the boundary of viscosity solutions of eikonal equations.* Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., **52** (2006) 177-188.

[2] P. Albano. *The singularities of the distance function near convex boundary points.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **16** (2009) 273-281.

[3] P. Albano. *On the local semiconcavity of the solutions of the eikonal equation.* Nonlinear Analysis 73 (2010), 458-464.

[4] P. Albano. *On the extension of the solutions of Hamilton-Jacobi equations.* preprint 2010.

[5] P. Albano. *On the eikonal equation for degenerate elliptic operators.* preprint 2010.

[6] P. Albano, A. Bove. *Analytic stratifications and the cut locus of a class of distance functions.* Israel J. Math., **154** (2006) 61-91.

[7] P. Albano, P. Cannarsa. *Singularities of semiconcave functions in Banach spaces.* In: Stochastic analysis, control, optimization and applications, 171–190, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999.

[8] P. Albano, P. Cannarsa. *Structural properties of singularities of semiconcave functions.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **28** (1999) 719-740.

[9] G. Alberti, L. Ambrosio, P. Cannarsa. *On the singularities of convex functions.* Manuscripta Math., **76** (1992) 421-435.

[10] L. Ambrosio, P. Cannarsa, H.M. Soner. *On the propagation of singularities of semi-convex functions.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **20** (1993) 597-616.

[11] V. I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, 1978.

[12] G. Barles. Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Mathématiques & Applications, 17. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[13] P. Cannarsa, H. M. Soner. *On the singularities of the viscosity solutions to Hamilton Jacobi Bellman equations.* Indiana Univ. Math. J., **36** (1987) 501-524.

[14] L. C. Evans, M. R. James. *The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for time-optimal control.* SIAM J. Control Optim., **27** (1989) 1477-1489.

[15] D. A. Gomes. *Hamilton-Jacobi methods for vakonomic mechanics.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **14** (2007) 233-257.

[16] H. Ishii. *Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations.* Indiana Univ. Math. J., **33** (1984) 721-748.

[17] H. Ishii. *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations.* Duke Math. J., **55** (1987) 369-384.

[18] H. Ishii. *A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type.* Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1987) 247-251.

[19] H. Ishii, H. Mitake. *Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians.* Indiana Univ. Math. J., **56** (2007) 2159-2183.

[20] S.N. Kruzhkov. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations of eikonal type. I. Statement of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; certain properties of the solutions.* Mat. Sb. (N.S.) 98, **140** (1975) 450-493.

[21] P.L. Lions. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Research Notes in Mathematics, 69. Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.

[22] C. Sinestrari. *Semiconcavity of solutions of stationary Hamilton-Jacobi equations.* Nonlinear Anal., **24** (1995) 1321-1326.

[23] M. Tamm. *Subanalytic sets in the calculus of variation.* Acta Math., **146** (1981) 167-199.

[24] E. Trélat. *Global subanalytic solutions of Hamilton-Jacobi type equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **23** (2006)363-387.

[25] L. Zajíček. *On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces.* Comment. Math. Univ. Carolin., **19** (1978) 513-523.