Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2009-10

Sergio Polidoro

Risultati di regolarità per il problema dell'ostacolo relativo ad equazioni di Kolmogorov degeneri

25 febbraio 2010

Abstract

We prove optimal regularity for solutions to the obstacle problem for a class of second order differential operators of Kolmogorov type. We treat smooth obstacles as well as non-smooth obstacles. All our proofs follow the same line of thought and are based on blow-ups, compactness, barriers and arguments by contradiction. This problem arises in financial mathematics, when considering path-dependent derivative contracts with the early exercise feature.

1. Introduzione

Presento uno studio svolto in collaborazione con Marie Frentz e Kaj Nyström, dell'Università di Umeå, e con Andrea Pascucci. I primi risultati sono già apparsi nel lavoro [5], altri, più recenti, sono contenuti nel lavoro [12] sottoposto ad una rivista per la pubblicazione. Abbiamo studiato la regolarità per il problema dell'ostacolo relativo ad un'equazione di Kolmogorov degenere

$$L = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j} - \partial_t \tag{1}$$

dove $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, m \leq N$, $a_{ij}(\cdot,\cdot)$ e $b_i(\cdot,\cdot)$ sono funzioni continue e limitate e $B = \big(b_{ij}\big)$ è una matrice a coefficienti costanti reali. Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

H1: Esiste una costante positiva λ tale che

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2, \quad \text{per ogni} \quad \xi \in \mathbb{R}^m,\ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1};$$

H2: l'operatore

$$Ku := \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_i x_i}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u \tag{2}$$

è ipoellittico;

H3: i coefficienti a_{ij}, b_i, per $i,j = 1,\dots,m$, e le funzioni f,g appartengono allo spazio $C_K^{0,\alpha}$ delle funzioni Hölderiane di esponente $\alpha \in]0,1]$, definite nel secondo capitolo.

Nel seguito denotiamo il campo vettoriale

$$Y = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j} - \partial_t,$$

e ricordiamo che **H2** può essere verificata per mezzo della ben nota condizione di Hörmander [6]

$$\text{rank Lie}(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_m},Y) = N+1, \tag{3}$$

dove $\text{Lie}(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_m},Y)$ denota l'algebra di Lie generata dai campi $\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_m},Y$. Per semplificare la presentazione, supporremo anche verificata la seguente ipotesi:

H4: l'operatore K è omogeneo di grado due rispetto alle dilatazioni $(\delta_r)_{r>0}$ definite nella formula (15).

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $\partial_P\Omega$ la sua frontiera parabolica. Per i nostri scopi non è restrittivo supporre che tutti i punti di $\partial_P\Omega$ siano regolari per il problema di valori iniziali-al contorno relativo ad L. Assegnate tre funzioni continue e limitate $g, f, \psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tali che $g \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, consideriamo il seguente problema dell'ostacolo:

$$\begin{cases} \max\{Lu(x,t) - f(x,t), \psi(x,t) - u(x,t)\} = 0, & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = g(x,t), & \text{su } \partial_P\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

La motivazione per lo studio del problema (4) si presenta nello studio delle opzioni Americane di tipo "path-dependent". Precisamente, consideriamo un modello di mercato finanziario in cui la variabile di stato è descritta da un processo aleatorio N-dimensionale $X = \left(X_t^{x_0,t_0}\right)$, che risolve la seguente equazione differenziale stocastica

$$dX_t^{x_0,t_0} = BX_t^{x_0,t_0} + \sigma(X_t^{x_0,t_0}, t)dW_t, \qquad X_{t_0}^{x_0,t_0} = x_0, \tag{5}$$

dove $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ e $W = \{W_t\}$ denota un processo di Wiener m-dimensionale, $m \leq N$. Un'opzione Americana con "pay-off" ψ è un contratto che dà al possessore il diritto di ricevere un premio pari a $\psi(X_\tau)$, se questi decide di esercitare l'opzione all'istante $\tau \in [0,T]$. La classica teoria dell'arbitraggio afferma che il prezzo equo dell'opzione Americana è dato dalla seguente formula di arresto ottimo

$$U(x,t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[\psi(X_\tau^{x,t})], \tag{6}$$

dove l'estremo superiore è preso nella famiglia di tutti i *tempi d'arresto* $\tau \in [t,T]$ (per semplificare le notazioni abbiamo anche supposto che il tasso di interesse sia nullo). I sottoinsistrattamente emi del dominio di U

$$\mathscr{E} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] : U(x,t) = \psi(x)\},$$
$$\mathscr{C} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] : U(x,t) > \psi(x)\}$$

sono solitamente denominati *regione di coincidenza* e *regione di continuazione*, rispettivamente. La frontiera $\mathscr{F}$ di $\mathscr{E}$ è chiamata *frontiera libera associata* o *frontiera di esercizio ottimo.*

Nei mercati finanziari esistono diversi tipi di opzioni Americane descritti da un'equazione stocastica (5) in cui m è strettamente minore di N e la cui equazione di Kolmogorov è, pertanto, degenere. La teoria rigorosa per la valutazione di questo tipo di opzioni, anche nel caso non degenere $m = N$, è piuttosto recente (si veda Bensoussan [1], Karatzas [8], Jaillet, Lamberton e Lapeyre [7]). Per quanto riguarda il caso degenere, a cui siamo maggiormante interessati, ricordo il lavoro [13] di Pascucci, in cui si dimostra che la funzione $u(x,t) = U(x, T-t)$ è soluzione del problema (4), con $f \equiv 0$, $g \equiv \psi$ ed $\Omega = \mathbb{R}^N \times [0,T]$. L'operatore L associato all'equazione stocastica (5) è

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} (\sigma\sigma^T)_{ij}\partial_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t. \tag{7}$$

E' opportuno osservare che la formula (6) che definisce la soluzione $u(x,t) = U(x,T-t)$ di (4) non fornisce molte informazioni sulla sua regolarità. D'altra parte è noto che anche nel caso uniformemente parabolico, il problema dell'ostacolo non ammette soluzioni regolari (di classe C^2) ed è pertanto necessario considerare soluzioni in senso debole. Risultati di esistenza per il problema dell'ostacolo (4) relativo all'insieme $\Omega = \mathbb{R}^N \times [0,T]$ sono stati dimostrati nel lavoro [3] in collaborazione con Di Francesco e Pascucci. In [3] viene dimostrata l'esistenza e l'unicità di una soluzione distribuzionale, definita in un opportuno spazio di tipo Sobolev-Stein $S^p_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Per quanto riguarda la regolarità della soluzione, si prova che, se l'ostacolo ψ è sufficientemente regolare, essa appartiene allo spazio $S^p_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty[$. Inoltre si dimostra che anche le soluzioni trovate con metodi variazionali e quelle nel senso della viscosità condividono le stesse proprietà di regolarità.

Lo scopo di questo lavoro è quello di studiare la regolarità ottimale delle soluzioni negli spazi S^p e negli spazi di funzioni Hölderiane $C^{n,\alpha}_K$ definiti nel seguente capitolo. Il primo risultato che viene presentato riguarda la regolarità interna ed è stato dimostrato nel lavoro [5].

Teorema 1.1. *Supponiamo verificate le ipotesi* **H1-4**. *Sia* $\alpha \in]0,1]$ *e siano* Ω, Ω' *sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *tali che* $\Omega' \subset\subset \Omega$. *Sia* u *una soluzione del problema* (4)*:*

i) *se* $\psi \in C^{0,\alpha}_K(\Omega)$ *allora* $u \in C^{0,\alpha}_K(\Omega')$ *e*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega')} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega)}\Big)\,;$$

ii) *se* $\psi \in C^{1,\alpha}_K(\Omega)$ *allora* $u \in C^{1,\alpha}_K(\Omega')$ *e*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}_K(\Omega')} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C^{1,\alpha}_K(\Omega)}\Big)\,;$$

iii) *se* $\psi \in C^{2,\alpha}_K(\Omega)$ *allora* $u \in S^\infty(\Omega')$ *e*

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega')} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C^{2,\alpha}_K(\Omega)}\Big)\,.$$

Nel successivo lavoro [12] abbiamo esteso le stime del Teorema 1.1 all'istante iniziale. Precisamente abbiamo considerato il problema (4) nel dominio

$$\Omega_{t_0} := \Omega \cap \{t > t_0\} \tag{8}$$

con t_0 assegnato ed abbiamo provato stime di regolarità Hölderiana nell'insieme $\Omega'_{t_0} = \Omega' \cap \{t > t_0\}$ qualunque sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Notiamo che la stima non è una banale conseguenza del Teorema 1.1 in quanto Ω'_{t_0} non è un sottoinsieme compatto di Ω_{t_0}. Il nostro secondo risultato è:

Teorema 1.2. *Sia* $\alpha \in]0,1]$ *e siano* Ω, Ω' *sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *tali che* $\Omega' \subset\subset \Omega$. *Sia* u *una soluzione del problema* (4) *nel dominio* Ω_{t_0}, $t_0 \in \mathbb{R}$, *definito in* (8)*:*

i) *se* $g, \psi \in C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in C^{0,\alpha}_K(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega'_{t_0})} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}\Big)\,;$$

ii) *se* $g, \psi \in C^{1,\alpha}_K(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in C^{1,\alpha}_K(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}_K(\Omega'_{t_0})} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C^{1,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C^{1,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}\Big)\,;$$

iii) *se* $g, \psi \in C^{2,\alpha}_K(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in S^\infty(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega'_{t_0})} \le c\Big(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C^{2,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C^{2,\alpha}_K(\Omega_{t_0})}\Big)\,.$$

Un risultato preliminare alla prova del Teorema 1.2 riguarda la regolarità all'istante iniziale del problema di Cauchy-Dirichlet seguente

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t), & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = g(x,t), & \text{on } \partial_P \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Benché si tratti di un risultato più semplice di quelli contenuti nei Teoremi 1.1 e 1.2, non era ancora stato dimostrato. Poiché ha interesse indipendentemente dal problema dell'ostacolo, nel lavoro [12] ne abbiamo inserito l'enunciato e la dimostrazione.

Teorema 1.3. *Supponiamo verificate le ipotesi* **H1-4**. *Sia* $\alpha \in]0,1]$ *e siano* Ω, Ω' *sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *tali che* $\Omega' \subset\subset \Omega$. *Sia* u *una soluzione del problema* (9) *nel dominio* Ω_{t_0}, $t_0 \in \mathbb{R}$, *definito in* (8)*:*

i) *se* $g \in C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c\left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}\right);$$

ii) *se* $g \in C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c\left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})}\right);$$

iii) *se* $g \in C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})$ *allora* $u \in S^\infty(\Omega'_{t_0})$ *e*

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega'_{t_0})} \leq c\left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})}\right).$$

Ricordo infine che stime a priori interne di tipo Schauder per le equazioni di Kolmogorov sono invece state dimostrate da Manfredini in [10] e successivamente da me e Di Francesco in [4]. Ne riportiamo per completezza l'enunciato: *Supponiamo verificate le ipotesi* **H1-3**. *Siano dati* $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *ed* $R > 0$. *Se* $u \in C_{K,\mathrm{loc}}^{2,\alpha}(Q_R(x,t))$ *è soluzione di* $Lu = f$ *in* $Q_R(x,t)$*, allora esiste una costante positiva* c *tale che*

$$\|u\|_{C_K^{2,\alpha}(Q_{R/2}(x,t))} \leq c(\|u\|_{L^\infty(Q_R(x,t))} + \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q_R(x,t))}). \tag{10}$$

Concludo l'introduzione con alcuni commenti. Innanzitutto sono ancora pochi i risultati noti in letteratura riguardo alla regolarità vicino all'istante iniziale per il problema dell'ostacolo, persino nel caso non degenere $m = N$. In effetti siamo a conoscenza solamente dei risultati di Nyström [11], Shahgholian [15] e di Petrosyan e Shahgholian [14]. Nel lavoro [15] vengono considerati operatori uniformemente parabolici, ma che possono anche essere di tipo “fully non-linear” mentre in [11] vengono considerati operatori, sempre uniformemente parabolici, che permettono di trattare problemi specifici di valutazione del prezzo di opzioni Americane su più titoli. Notiamo che i nostri Teoremi 1.1 e 1.2 migliorano leggermente i risultati noti anche nel caso non degenere ($m = N$ in particolare il Teorema 4.3 di [14] e i Teoremi 1.2 e 1.3 in [15]), in quanto forniscono la regolarità Hölderiana della soluzione con l’esponente ottimale.

La tecnica della dimostrazione si basa su un procedimento di “blow-up” precedentemente introdotto da Caffarelli, Petrosyan e Shahgholian [2] nello studio dell’equazione del calore. Il nucleo del ragionamento si basa sulla norma

$$S_k^+(u) = \sup_{Q^+_{2^{-k}}} |u| \tag{11}$$

dove u è una soluzione del problema dell’ostacolo, Q^+ e Q^+_r sono i cilindri di taglia r definiti in (17). Un passaggio fondamentale nella prova dei Teoremi 1.1 e 1.2, è la dimostrazione dell’esistenza di una costante positiva $\tilde{c}$, che dipende dalle norme delle funzioni u, g, f, ψ, tale che

$$S^+_{k+1}(u - F) \le \max\left(\tilde{c}\, 2^{-(k+1)\gamma}, \frac{S_k^+(u-F)}{2^\gamma}, \frac{S^+_{k-1}(u-F)}{2^{2\gamma}}, \dots, \frac{S^+_0(u-F)}{2^{(k+1)\gamma}} \right) \tag{12}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. In questa construzione sceglieremo F e γ come segue:

$$\begin{aligned} &\text{Teoremi 1.1 e 1.2-}i\text{):} && F = P_0^{(0,0)} g = g(0,0), \ \gamma = \alpha, \\ &\text{Teoremi 1.1 e 1.2-}ii\text{):} && F = P_1^{(0,0)} g, \ \gamma = 1+\alpha, \\ &\text{Teoremi 1.1 e 1.2-}iii\text{):} && F = P_2^{(0,0)} g, \ \gamma = 2, \end{aligned}$$

dove $P_n^{(0,0)}$ è il Polinomio di Taylor definito nell’Osservazione 2.1. La prova di (12) si basa su un ragionamento per assurdo.

Questa presentazione è organizzata come segue: nel Capitolo 2 vengono richiamati alcuni risultati sulle equazioni di Kolmogorov, nel Capitolo 3 si dimostra (12) e nel Capitolo 4 si fornisce la prova dei Teoremi 1.1 e 1.2 solamente per la regolarità negli spazi $C^{0,\alpha}_K$. Rimando ai lavori [5] e [12] per la dimostrazione completa.

2. Risultati preliminari

In questo capitolo vengono raccolti alcuni risultati che riguardano gli operatori di tipo Kolmogorov che saranno utilizzati nella prova dei Teoremi 1.1, 1.2 e 1.3. Ricordiamo innanzitutto la struttura di gruppo di Lie rispetto alla quale gli operatori di Kolmogorov a coefficienti costanti K in (2) risultano invarianti (si veda [9])

$$(x,t)\circ(y,s)=(y+E(s)x,t+s), \qquad E(s)=\exp(-sB^T), \qquad (x,t),(y,s)\in\mathbb{R}^{N+1}, \tag{13}$$

(B^T indica la trasposta di B). Ricordiamo che una condizione equivalente alla nostra ipotesi **H2** è che, rispetto ad una opportuna base di $\mathbb{R}^N$, la matrice B assume la forma seguente

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_\kappa \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \tag{14}$$

dove ogni B_j è una matrice $m_{j-1}\times m_j$ di rango m_j, $1\le m_\kappa\le ...\le m_1\le m$ e $m+m_1+...+m_\kappa=N$. I blocchi indicati con $*$ hanno i coefficienti arbitrari, nel caso in cui i coefficienti siano tutti nulli, allora l'operatore K risulta invariante anche rispetto al seguente guppo di dilatazioni

$$D_r=\mathrm{diag}(rI_m, r^3 I_{m_1},..,r^{2\kappa+1}I_{m_\kappa}), \qquad \delta_r=\mathrm{diag}(D_r,r^2),\ r>0, \tag{15}$$

(I_k indica la matrice identità k-dimensionale).

Per ogni $x\in\mathbb{R}^N$ ed $r>0$ indichiamo con $B_r(x)$ la palla aperta di $\mathbb{R}^N$ di centro x e raggio r. Indichiamo con $\mathbf{e}_1$ il primo vettore della base canonica, e definiamo

$$\begin{aligned} Q &= \left(B_1(\tfrac12\mathbf{e}_1)\cap B_1(-\tfrac12\mathbf{e}_1)\right)\times]-1,1[, \\ Q^+ &= \left(B_1(\tfrac12\mathbf{e}_1)\cap B_1(-\tfrac12\mathbf{e}_1)\right)\times]0,1[, \\ Q^- &= \left(B_1(\tfrac12\mathbf{e}_1)\cap B_1(-\tfrac12\mathbf{e}_1)\right)\times]-1,0[. \end{aligned} \tag{16}$$

Resta così definito un cilindro Q nelle variabili spazio e tempo, Q^+ e Q^- sono la parte superiore ed inferiore, rispettivamente. Definiamo il cilindro riscalato alla taglia $r > 0$ e traslato in $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ ponendo

$$Q_r = \delta_r(Q), \quad Q_r(x,t) = (x,t) \circ Q_r, \quad Q_r^{\pm} = \delta_r(Q^{\pm}), \quad Q_r^{\pm}(x,t) = (x,t) \circ Q_r^{\pm}. \tag{17}$$

Un'importante proprietà dei cilindri $Q_r(x,t)$ è che il loro bordo parabolico è costituito da punti regolari per il problema di Cauchy-Dirichlet. Notiamo che, a causa di (15), l'altezza dei cilindri $Q_r^{\pm}$ è esattamente r^2. Nel seguito avremo bisogno di considerare cilindri di altezza T e raggio r, con $T \neq r^2$. Poniamo pertanto $Q^{\pm}(T) = \left(B_1(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1) \cap B_1(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_1)\right) \times (0,T]$, e $Q_r^{\pm}(x,t,T) = (x,t) \circ \delta_r\left(Q^{\pm}(r^{-2}T)\right)$.

Definiamo una quasi-norma ed una quasi-distanza su $\mathbb{R}^{N+1}$ ponendo

$$d_K((x,t),(\xi,\tau)) = \inf\{r > 0 \mid (x,t) \in Q_r(\xi,\tau)\}, \qquad \|(x,t)\|_K = d_K((x,t),(0,0)). \tag{18}$$

La norma risulta essere una funzione omogenea rispetto alle dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ definite in (15): $\|\delta_r(x,t)\|_K = r\|(x,t)\|_K$. Vale inoltre la seguente disuguaglianza triangolare (cf. [4]): per ogni insieme compatto $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$, esiste una costante positiva c tale che

$$\|z^{-1}\|_K \le c\|z\|_K, \qquad \|z \circ w\|_K \le c\left(\|z\|_K + \|w\|_K\right), \qquad z,w \in H. \tag{19}$$

Dalla (19) segue che, per ogni $r_0 > 0$ esiste una costante positiva c tale che:

i) se $(x,t) \in Q_r(\xi,\tau)$ allora $(\xi,\tau) \in Q_{cr}(x,t)$ per $r \in]0,r_0[$;

ii) se $(x,t) \in Q_r(\xi,\tau)$ allora $Q_\rho(x,t) \subseteq Q_{c(r+\rho)}(\xi,\tau)$ per $r,\rho \in]0,r_0[$.

Osserviamo anche che, di conseguenza, si ha che se $(x,t) \in Q_r(\xi,\tau)$ allora

$$Q_r(\xi,\tau) \subseteq Q_{C_1 r}(x,t) \qquad r \in]0,r_0[, \tag{20}$$

per una opportuna costante positiva C_1. Definiamo infine, per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$,

$$d_K(z,H) := \inf\left\{d_K(z,w) \mid w \in H\right\}. \tag{21}$$

Introduciamo ora gli spazi di funzioni (di Hölder e di Sobolev) relativi alle equazioni di Kolmogorov. Sia $\alpha \in (0,1]$ e sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^{N+1}$. Denotiamo con $C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $C_K^{1,\alpha}(\Omega)$

e $C_K^{2,\alpha}(\Omega)$ lo spazio di funzioni Hölderiane definite dalle seguenti norme:

(22)

$$\|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\substack{z,\zeta\in\Omega \\ z\neq\zeta}} \frac{|u(z)-u(\zeta)|}{d_K(z,\zeta)^\alpha},$$

$$\|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|\partial_{x_j} u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \sup_{\substack{z,\zeta\in\Omega \\ z\neq\zeta}} \frac{|u(z)-u(\zeta)-\sum_{j=1}^m (z_j-\zeta_j)\partial_{x_j}u(\zeta)|}{d_K(z,\zeta)^{1+\alpha}},$$

$$\|u\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^m \|\partial_{x_i x_j} u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \|Yu\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Osservazione 2.1. *Poniamo*

$$P_0^{(\xi,\tau)}u(x,t) = u(\xi,\tau),$$

$$P_1^{(\xi,\tau)}u(x,t) = u(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^m (x_j-\xi_j)\partial_{x_j}u(\xi,\tau),$$

$$P_2^{(\xi,\tau)}u(x,t) = u(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^m (x_j-\xi_j)\partial_{x_j}u(\xi,\tau)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^m (x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\partial_{x_i x_j}u(\xi,\tau) - (t-\tau)Yu(\xi,\tau).$$

Se $u \in C_K^{n,\alpha}$ (con $n = 0,1,2$) allora risulta

$$\left|u(x,t) - P_n^{(\xi,\tau)}u(x,t)\right| \le \|u\|_{C_K^{n,\alpha}}\, d_K\left((x,t),(\xi,\tau)\right)^{n+\alpha}.$$

Definiamo per $p \in [1,\infty]$ gli spazi di Sobolev-Stein

$$S^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ \partial_{x_i}u, \partial_{x_i x_j}u, Yu \in L^p(\Omega), \ i,j = 1,...,m\}$$

e poniamo

$$\|u\|_{S^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^m \|\partial_{x_i}u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^m \|\partial_{x_i x_j}u\|_{L^p(\Omega)} + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se $u \in C_K^{n,\alpha}(\Omega')$ per ogni sottoinsieme compatto Ω' di Ω, allora scriviamo $u \in C_{K,\mathrm{loc}}^{n,\alpha}(\Omega)$. Se $u \in S^p(\Omega')$ per ogni sottoinsieme compatto Ω' di Ω, scriviamo $u \in S^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Concludo questo capitolo con l'enunciato, senza dimostrazione, di alcuni risultati che saranno utilizzati nel seguito. Nel Lemma 2.1 Γ denota la soluzione fondamentale di L.

Lemma 2.1. *Data una costante positiva γ, definiamo la funzione*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t,y,0) \|(y,0)\|_K^\gamma dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0.$$

Allora esiste una costante c_γ tale che

$$u(x,t) \le c_\gamma \|(x,t)\|_K^\gamma.$$

Lemma 2.2. *Supponiamo verificate le ipotesi* **H1-4***, e sia dato $R > 0$. Allora esistono tre costanti $R_0, C_0, C_1 > 0$, $R_0 \ge 2R$, tali che*

$$\sup_{Q_R^+} |v| \le C_0 e^{-C_1 \tilde{R}^2} \sup_{\partial_P Q_{\tilde{R}}^+ \cap \{(x,t):\ 0 < t \le R^2\}} |v|$$

per ogni $\tilde{R} \ge R_0$ e per ogni soluzione v di $Lv = 0$ in $Q_{\tilde{R}}^+(0,0,R^2)$ tale che $v(\cdot,0) = 0$.

Lemma 2.3. *Supponiamo verificate le ipotesi* **H1-4**. *Per ogni $\tilde{R} \ge 2$ esistono due costanti c e $\tilde{c}$ tali che*

$$\sup_{Q_{\tilde{R}}^- \cap \{(x,t):\ t=-2\}} u \le \tilde{c} \inf_{Q_{\tilde{R}/2}^-(0,0,1)} u,$$

per ogni soluzione positiva u di $Lu = 0$ in $Q_{\overline{R}}^-(0,0,3)$ con $\overline{R} \ge c\tilde{R}^{2\kappa+1}$.

3. Prova delle stime fondamentali

Iniziamo questo capitolo con alcune stime per il problema di Cauchy-Dirichlet.

Definizione 3.1. *Sia L u operatore della forma (1) che verifica le ipotesi* **H1-4***, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dato dominio, $n \in \{0,1,2\}$, $\alpha \in (0,1]$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti positive. Diciamo che (u,f,g) appartiene alla classe $\mathscr{D}_n(L,\Omega,\alpha,M_1,M_2,M_3)$ se u è soluzione del problema (9) con $f \in C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $g \in C_K^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_1, \quad \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} \le M_2, \quad \|g\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \le M_3.$$

Lemma 3.1. *Siano $R, \alpha \in]0,1]$, $n = 0,1,2$, $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti positive. Supponiamo che*

$$(u,f,g) \in \mathscr{D}_n(L, Q_R^+(x_0,t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3).$$

Allora esiste $C_\alpha = C(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ *tale che*

$$\sup_{Q_r^+(x_0,t_0)} |u-g| \le C_\alpha r^{n+\alpha}, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 0,1$$

$$\sup_{Q_r^+(x_0,t_0)} |u-g| \le C_\alpha r^{2}, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 2.$$

Dim. Grazie all'invarianza di L rispetto alle traslazioni e alle dilatazioni, non è restritivo supporre $(x_0, t_0) = (0, 0)$ ed $R = 1$. Inoltre, per l'Osservazione 2.1, è sufficiente mostrare che

$$\sup_{Q_r^+(0,0)} \left|u - P_n^{(0,0)} g\right| \le c r^\gamma, \qquad r \in]0,1[,$$

dove $\gamma = \alpha + n$ se $n = 0, 1$ e $\gamma = 2$ se $n = 2$. Osserviamo infine che la funzione $v_n = u - P_n^{(0,0)} g$ è soluzione di

$$L v_n = f - L P_n^{(0,0)} g =: f_n,$$

con $f_n \in C_K^{0,\alpha}$. Pertanto, non è restrittivo supporre $P_n^{(0,0)} g = 0$.

Dopo queste considerazioni preliminari, iniziamo a considerare in modo specifico il caso $n = 0$. Denotiamo con v_1, v_2, v_3 le soluzioni dei tre seguenti problemi:

$$\begin{cases} Lv_1 = 0 & \text{in } Q^+, \\ v_1 = 0 & \text{su } \partial_P^+ Q^+, \\ v_1 = g & \text{su } \partial_P^- Q^+, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv_2 = 0 & \text{in } Q^+, \\ v_2 = g & \text{su } \partial_P^+ Q^+, \\ v_2 = 0 & \text{su } \partial_P^- Q^+, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv_3 = -\|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} & \text{in } Q^+, \\ v_3 = 0 & \text{su } \partial_P Q^+, \end{cases}$$

dove

$$\partial_P^+ Q^+ = \partial_P Q^+ \cap \{t > 0\}, \qquad \partial_P^- Q^+ = \partial_P Q^+ \cap \{t = 0\}.$$

Per il principio del confronto si ha

$$v_1 + v_2 - v_3 \le u \le v_1 + v_2 + v_3 \qquad \text{in } Q^+, \tag{23}$$

di conseguenza è sufficiente dimostrare che vale

$$\sup_{Q_r^+} (|v_1| + |v_2| + |v_3|) \le c r^\alpha, \tag{24}$$

per ogni r sufficientemente piccolo.

Poiché $\|g\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \le M_3$, dal principio del confronto segue

$$|v_1(x,t)| \le M_3 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t,y,0)\|(y,0)\|_K^\alpha dy$$

quindi, per il Lemma 2.1, si trova

$$|v_1(x,t)| \le M_3 c_\alpha \|(x,t)\|_K^\alpha.$$

Applichiamo poi il Lemma 2.2 con $R = 1$. Troviamo

$$\sup_{Q_r^+} |v_2| \le C_0 \exp\left(-\frac{C_1}{r^2}\right) \sup_{\partial_P^+ Q^+} |v_2|$$

per ogni $r \le \frac{1}{R_0}$. Poiché poi $|v_2|$ coincide con $|u|$ su $\partial_P^+ Q^+$, possiamo concludere che

$$\sup_{Q_r^+} |v_2| \le C_0 \, M_1 \exp\left(-\frac{C_1}{r^2}\right) \le c_2 r^2, \qquad \text{per ogni} \quad r \in \left]0, \frac{1}{R_0}\right].$$

Si ha infine

$$|v_3(x,t)| \le \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t,y,s) dy ds \le t \, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \le M_2 \|(x,t)\|_K^2.$$

questo conclude la prova di (24) e del risultato del Lemma per $n = 0$.

Per $n = 1, 2$ utilizziamo lo stesso procedimento. In particolare, quando applichiamo il Lemma 2.1 con $\gamma = n + \alpha$, troviamo

$$|v_1(x,t)| \le M_3 c_{n+\alpha} \|(x,t)\|_K^{n+\alpha}.$$

□

Proviamo ora le stime del problema dell'ostacolo vicino all'istante iniziale. Come già detto nell'Introduzione, faremo uso di un procedimento di "blow-up" per una funzione $v \in C(\Omega)$ ponendo

$$v^r(x,t) := v\left(\delta_r(x,t)\right), \qquad r > 0, \tag{25}$$

per ogni $r > 0$ tale che $\delta_r(x,t) \in \Omega$. Un conto diretto mostra che

$$Lv = f \text{ in } \Omega \quad \text{se, e solo se,} \quad L_r v^r = r^2 f^r \text{ in } \delta_{1/r}\Omega, \tag{26}$$

dove

$$L_r = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^r \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} r b_i^r \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t. \tag{27}$$

Osservazione 3.1. *Dato $r \in]0,1[$ ed $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo*

$$u^{r,(x_0,t_0)}(x,t) = u((x_0,t_0) \circ \delta_r(x,t)). \tag{28}$$

Risulta $u \in C_K^{n,\alpha}$ se, e solo se, $u^{r,(x_0,t_0)} \in C_K^{n,\alpha}$ e

$$\|u^{r,(x_0,t_0)}\|_{C_K^{n,\alpha}} \le \|u\|_{C_K^{n,\alpha}}.$$

Infatti, nel caso $n=0$ si ha

$$\|u^{r,(x_0,t_0)}\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u| + r^{\alpha} \sup_{\substack{z,\zeta \in \Omega \\ z \ne \zeta}} \frac{|u(z)-u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|_K^{\alpha}} \le \|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Inoltre

$$Lu = f \;\; in \; (x_0,t_0) \circ \delta_r(\Omega) \quad se, \; e \; solo \; se, \quad L^{r,(x_0,t_0)} u^{r,(x_0,t_0)} = r^2 f^{r,(x_0,t_0)} \;\; in \; \Omega,$$

dove

$$L_r^{(x_0,t_0)} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^{r,(x_0,t_0)}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} r b_i^{r,(x_0,t_0)}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{29}$$

Pertanto, utilizzando le notazioni della seguente Definizione 3.2, si ha

$$u \in \mathscr{P}_n(L, (x_0,t_0) \circ \delta_r(\Omega), \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4) \implies$$
$$u^{r,(x_0,t_0)} \in \mathscr{P}_n(L_r^{(x_0,t_0)}, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4).$$

Il risultato fondamentale riguardo alla regolarità vicino all'istante iniziale è il seguente Lemma, a cui premettiamo alcune notazioni

Definizione 3.2. *Sia L u operatore della forma (1) che verifica le ipotesi* **H1-4**, *sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dato dominio, $n \in \{0,1,2\}$, $\alpha \in (0,1]$ e siano M_1, M_2, M_3, M_4 quattro costanti positive. Diciamo che (u,f,g,ψ) appartiene alla classe $\mathscr{P}_n(L,\Omega,\alpha,M_1,M_2,M_3,M_4)$ se u è una soluzione forte del problema (4) con $f \in C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $\psi, g \in C_K^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \ge \psi$ su $\partial_P \Omega$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_1, \quad \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} \le M_2, \quad \|g\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \le M_3, \quad \|\psi\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \le M_4.$$

Lemma 3.2. *Siano* $R, \alpha \in]0,1]$, $n = 0,1,2$, $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e siano* M_1, M_2, M_3, M_4 *quattro costanti assegnate. Supponiamo che*

$$(u,f,g,\psi) \in \mathscr{P}_n(L, Q_R^+(x_0,t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4).$$

Allora esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$ *tale che*

$$\sup_{Q_r^+(x_0,t_0)} |u-g| \le c r^{n+\alpha}, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 0,1$$

$$\sup_{Q_r^+(x_0,t_0)} |u-g| \le c r^2, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 2.$$

Dim. Mostriamo innanzitutto che esiste una costante positiva $C_\alpha = C(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$\inf_{Q_r^+(x_0,t_0)} u - g \ge -C_\alpha r^{n+\alpha}, \qquad r \in]0,R[, \quad \text{per } n = 0,1 \tag{30}$$

$$\inf_{Q_r^+(x_0,t_0)} u - g \ge -C_\alpha r^2, \qquad r \in]0,R[, \quad \text{per } n = 2. \tag{31}$$

Sia v una soluzione del problema di Dirichlet (9) sul dominio $\Omega = Q_r^+(x_0,t_0)$. Per il principio del confronto si ha $u \ge v$ e le disuguaglianze (30)-(31) sono conseguenza immediata del Lemma 3.1, dal momento che

$$(v,f,g) \in \mathscr{D}_n(L, Q_R^+(x_0,t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3).$$

Concludiamo la prova del Lemma 3.2 basandoci sulle (30)-(31). Iniziamo con qualche considerazione preliminare finalizzata alla riduzione della complessità del problema. Come nella prova del Lemma 3.1, osserviamo che non è restrittivo supporre $(x_0,t_0) = (0,0)$, $R = 1$ e $P_n^{(0,0)} g \equiv 0$. Per l'Osservazione 2.1, è quindi sufficiente dimostrare che

$$\sup_{Q_r^+(0,0)} |u| \le c r^\gamma, \qquad r \in]0,1[,$$

dove $\gamma = \alpha + n$ se $n = 0,1$ e $\gamma = 2$ se $n = 2$. Ricordiamo la definizione di $S_k^+(u)$ in (11). Vogliamo dimostrare che la (12) vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, con un'opportuna costante positiva $\tilde{c} = \tilde{c}(L, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$. Infatti, un elementare ragionamento iterativo mostra che dalla (12) segue la disuguaglianza

$$S_k^+(u) \le \frac{\tilde{c}}{2^{k\gamma}},$$

che è equivalente all'affermazione del Lemma 3.2.

Consideriamo dapprima il caso $n = 0$ e dimostriamo la (12) con $\gamma = \alpha$. Supponiamo che sia

$$(u, f, g, \psi) \in \mathscr{P}_0(L, Q^+, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4),$$

e dividiamo il ragionamento in tre passi.

Passo 1 (Inizio del ragionamento per assurdo). Osserviamo innanzitutto che da (30) segue

$$u(x,t) \geq -(C_\alpha + M_3)\,\|(x,t)\|_K^\alpha, \qquad (x,t) \in Q^+. \tag{32}$$

Supponiamo che (12) sia falsa. Allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste un numero naturale k_j ed una funzione $(u_j, f_j, g_j, \psi_j) \in \mathscr{P}_0(L, Q^+, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$ tale che $u_j(0,0) = 0 \geq \psi_j(0,0)$ e

$$S^+_{k_j+1}(u_j) > \max\left(\frac{j\,(C_\alpha + M_3)}{2^{(k_j+1)\alpha}}, \frac{S^+_{k_j}(u_j)}{2^\alpha}, \frac{S^+_{k_j-1}(u_j)}{2^{2\alpha}}, \dots, \frac{S^+_0(u_j)}{2^{(k_j+1)\alpha}}\right). \tag{33}$$

Per la definizione (11) deve esistere un punto (x_j, t_j) nella chiusura di $Q^+_{2^{-k_j-1}}$ tale che $|u_j(x_j,t_j)| = S^+_{k_j+1}(u_j)$ per ogni $j \geq 1$. A causa di (32) deve essere $u_j(x_j,t_j) > 0$. Inoltre, utilizzando (33) ed il fatto che $|u_j| \leq M_1$, deduciamo che la successione $j2^{-\alpha k_j}$ deve essere limitata e che, pertanto, $k_j \to \infty$ per $j \to \infty$.

Passo 2 (Costruzione del blow-up). Definiamo $(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) = \delta_{2^{k_j}}((x_j,t_j))$ e $\tilde{u}_j : Q^+_{2^{k_j}} \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\tilde{u}_j(x,t) = \frac{u_j(\delta_{2^{-k_j}}(x,t))}{S^+_{k_j+1}(u_j)}. \tag{34}$$

Notiamo che $(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j)$ appartiene alla chiusura di $Q^+_{1/2}$ e che

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) = 1. \tag{35}$$

Poniamo inoltre $\tilde{L}_j = L_{2^{-k_j}}$ (si veda (27) per la definizione dell'operatore riscalato),

$$\tilde{f}_j(x,t) = 2^{-2k_j}\frac{f_j(\delta_{2^{-k_j}}(x,t))}{S^+_{k_j+1}(u_j)}, \quad \tilde{g}_j(x,t) = \frac{g_j(\delta_{2^{-k_j}}(x,t))}{S^+_{k_j+1}(u_j)}, \quad \tilde{\psi}_j(x,t) = \frac{\psi_j(\delta_{2^{-k_j}}(x,t))}{S^+_{k_j+1}(u_j)} \tag{36}$$

per $(x,t) \in Q^+_{2^{k_j}}$. Dalla (26) segue che

$$\begin{cases} \max\{\tilde{L}_j \tilde{u}_j - \tilde{f}_j, \tilde{\psi}_j - \tilde{u}_j\} = 0, & \text{in } Q^+_{2^{k_j}}, \\ \tilde{u}_j = \tilde{g}_j, & \text{in } \partial_P Q^+_{2^{k_j}}. \end{cases}$$

Nel seguito $l \in \mathbb{N}$ indicherà una costante fissata che sarà precisata al successivo Passo 3. Risulta

$$(\tilde{u}_j, \tilde{u}_j, \tilde{f}_j, \tilde{\psi}_j) \in \mathscr{P}_0(\tilde{L}_j, Q^+_{2^l}, \alpha, \tilde{M}^j_1, \tilde{M}^j_2, \tilde{M}^j_3, \tilde{M}^j_4),$$

per opportune costanti $\tilde{M}^j_1, \tilde{M}^j_2, \tilde{M}^j_3, \tilde{M}^j_4$. Dalla (33) segue che

$$\tilde{M}^j_1 = \sup_{Q^+_{2^l}} |\tilde{u}_j| = \frac{S^+_{k_j - l}(u_j)}{S^+_{k_j+1}(u_j)} \le 2^{(l+1)\alpha} \quad \text{per ogni} \quad k_j > l. \tag{37}$$

Inoltre, per l'Osservazione 3.1, si ha

$$\tilde{M}^j_2 \le 2^{-2k_j} \frac{M_2}{S^+_{k_j+1}(u_j)}. \tag{38}$$

Poniamo ora

$$m_j = \max\left\{ \|\tilde{g}_j\|_{L^\infty(Q^+_{2^l})}, \sup_{Q^+_{2^l}} \tilde{\psi}_j \right\}. \tag{39}$$

Allora, per la (33) e per la regolarità $C^{0,\alpha}_K$ di g_j e ψ_j, si trova

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{M}^j_2 = \lim_{j\to\infty} m_j = 0. \tag{40}$$

Si noti che non è detto che $\tilde{M}^j_4$ tenda a zero per $j \to \infty$, in quanto sappiamo solamente che $\tilde{\psi}_j(0,0) \le 0$.

Passo 3 (Contraddizione). Alla fine di questa sezione sceglieremo l sufficientemente grande da raggiungere una contraddizione. In corrispondenza di l, scegliamo $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $k_j > 2^l$ per ogni $j \ge j_0$. Poniamo

$$\partial^+_P Q^+_{\tilde{R}}(0,0,1) = \partial_P Q^+_{\tilde{R}}(0,0,1) \cap \{t > 0\}, \qquad \partial^-_P Q^+_{\tilde{R}}(0,0,1) = \partial_P Q^+_{\tilde{R}}(0,0,1) \cap \{t = 0\}.$$

Denotiamo con $\tilde{v}_j$ la soluzione di

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q^+_{2^l})} & \text{in } Q^+_{2^l}, \\ \tilde{v}_j = \tilde{M}^j_1 & \text{su } \partial^+_P Q^+_{2^l}, \\ \tilde{v}_j = m_j & \text{su } \partial^-_P Q^+_{2^l}, \end{cases} \tag{41}$$

e dimostriamo che

$$\tilde{u}_j \le \tilde{v}_j \text{ in } Q^+_{2^l}. \tag{42}$$

Per il principio del massimo si ha $\tilde{v}_j \ge m_j \ge \tilde{\psi}_j$ in $Q^+_{2^l}$. Inoltre

$$\tilde{L}_j(\tilde{v}_j - \tilde{u}_j) = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q^+_{2^l})} + \tilde{f}_j \le 0 \quad \text{in} \quad \Omega := Q^+_{2^l} \cap \{(x,t) : \ \tilde{u}_j(x,t) > \tilde{\psi}_j(x,t)\},$$

e $\tilde{v}_j \ge \tilde{u}_j$ su $\partial\Omega$. La (42) segue allora dal principio del confronto. mostriamo ora che (42) è in contraddizione con (35). Scomponiamo la funzione $\tilde{v}_j$ nel modo seguente: $\tilde{v}_j = w_j + \tilde{w}_j + \hat{w}_j$ su $Q^+_{2^l}(0,0,1)$, dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j w_j = 0 & \text{in } Q^+_{2^l}(0,0,1), \\ w_j = 0 & \text{su } \partial^+_P Q^+_{2^l}(0,0,1), \\ w_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial^-_P Q^+_{2^l}(0,0,1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{w}_j = 0 & \text{in } Q^+_{2^l}(0,0,1), \\ \tilde{w}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial^+_P Q^+_{2^l}(0,0,1), \\ \tilde{w}_j = 0 & \text{su } \partial^-_P Q^+_{2^l}(0,0,1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \hat{w}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q^-_{2^l})} & \text{in } Q^+_{2^l}(0,0,1), \\ \hat{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q^+_{2^l}(0,0,1). \end{cases}$$

Utilizzando il principio del confronto si trova che

$$w_j \le m_j \quad \text{in} \ \ Q^+_{2^l}(0,0,1), \tag{43}$$

e che

$$\|\hat{w}_j\|_{L^\infty\left(Q^+_{2^l}(0,0,1)\right)} \le \|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q^+_{2^l})} \le \tilde{M}^j_2. \tag{44}$$

Applichiamo ora il Lemma 2.2 al cilindro $Q^+_{2^l}(0,0,1)$, con $R = 1$ e $\tilde{R} = 2^l$. Utilizzando (37) otteniamo

$$\sup_{Q^+} \tilde{w}_j \le C_0 e^{-C_1 4^l} \sup_{\partial^+_P Q^+_{2^l}(0,0,1)} \tilde{v}_j \le C_0 e^{-C_1 4^l} \tilde{M}_1^j \le C_0 e^{-C_1 4^l} 2^{(l+1)\alpha}. \tag{45}$$

Osserviamo che il termine a destra della disuguaglianza può essere reso arbitrariamente piccolo, scegliendo l sufficientemente grande, indipendentemente da j. Combinando (43), (44) e (45) si conclude che, se l e j_0 sono sufficientemente grandi, si ha

$$\sup_{Q^+} \tilde{v}_j \le \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } j \ge j_0.$$

Questa disuguaglianza contraddice (35) e (42) e conclude la prova del Lemma per $n = 0$.

La prova per $n = 1, 2$ è analoga. Si seguono i Passi 1 e 2, e si arriva a dimostrare che (40) vale anche per $n = 1, 2$. In entrambi i casi lo stesso ragionamento utilizzato in precedenza mostra che $\tilde{M}_2^j \to 0$ per $j \to \infty$. Proviamo ora che anche $m_j \to 0$ per $j \to \infty$. Consideriamo prima il caso $n = 1$. Sia (x, t), un arbitrario punto di $Q^+_{2^l}$ e sia $\tilde{x} = E(-t)x$. Osserviamo che, per (13), risulta $(\tilde{x}, 0) = (x, t) \circ (0, t)^{-1} = (x, t) \circ (0, -t)$. Quindi, utilizzando la (19), troviamo

$$\|(\tilde{x}, 0)\|_K \le c \left(\|(x, t)\|_K + \|(0, t)\|_K\right) \le 2c\|(x, t)\|_K.$$

Di conseguenza si ha

$$\tilde{\psi}_j(x,t) = \tilde{\psi}_j(x,t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x},0) + \tilde{\psi}_j(\tilde{x},0) \le \left|\tilde{\psi}_j(x,t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x},0)\right| + \tilde{g}_j(\tilde{x},0) \tag{46}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che $\tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0) \le \tilde{g}_j(\tilde{x}, 0)$ per ogni $(\tilde{x}, 0) \in Q^+_{2^l}$. D'altra parte, per (36) risulta

$$\left|\tilde{\psi}_j(x,t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x},0)\right| \le 2^{(\alpha+1)(l-k_j)} \frac{M_4}{S^+_{k_j+1}(u_j)} \to 0 \text{ per } j \to \infty. \tag{47}$$

Inoltre, poiché $P_1^{(0,0)} \tilde{g}_j = 0$, si ha anche

$$|\tilde{g}_j(\tilde{x}, 0)| \le 2^{(\alpha+1)(l-k_j)} \frac{M_3}{S^+_{k_j+1}(u_j)} \to 0 \text{ per } j \to \infty. \tag{48}$$

Le disuguaglianze (46)-(48) combinate insieme mostrano che $m_j \to 0$ per $j \to \infty$ anche nel caso $n = 1$. Il caso $n = 2$ è analogo. $\square$

Osserviamo che nella prova del Lemma 3.2 non abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Harnack del Lemma 2.3. Quest'ultima è invece fondamentale nella prova del seguente Lemma, che costituisce il risultato fondamentale per la regolarità interna.

Definizione 3.3. *Sia L u operatore della forma* (1) *che verifica le ipotesi* **H1-4**, *sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un dato dominio,* $n \in \{0,1,2\}$, $\alpha \in (0,1]$ *e siano* M_1, M_2, M_3 *tre costanti positive. Diciamo che* (u, f, g, ψ) *appartiene alla classe* $\mathscr{P}'_n(L, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ *se* u *è una soluzione forte del problema* (4) *con* $f \in C^{0,\alpha}_K(\Omega)$, $\psi \in C^{n,\alpha}_K(\overline{\Omega})$, $g \geq \psi$ *su* $\partial_P\Omega$ *e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1, \quad \|f\|_{C^{0,\alpha}_K(\Omega)} \leq M_2, \quad \|\psi\|_{C^{n,\alpha}_K(\Omega)} \leq M_3.$$

Lemma 3.3. *Siano* $R, \alpha \in]0,1]$, $n = 0,1,2$, $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e siano* M_1, M_2, M_3 *tre costanti assegnate. Supponiamo che*

$$(u, f, g, \psi) \in \mathscr{P}'_n(L, Q_R(x_0,t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3), \qquad u(x_0,t_0) = \psi(x_0,t_0).$$

Allora esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ *tale che*

$$\sup_{Q_r(x_0,t_0)} \left|u - P_n^{(x_0,t_0)}\psi\right| \leq cr^{n+\alpha}, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 0,1,$$

$$\sup_{Q_r(x_0,t_0)} |u - \psi| \leq cr^2, \qquad r \in]0,R[, \quad \textit{per } n = 2.$$

Dim. E' sufficiente dimostrare l'affermazione nella parte inferiore del cilindro $Q_r^-(x_0,t_0)$: precisamente basta dimostrare che esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$\begin{aligned} &\sup_{Q_r^-(x_0,t_0)} \left|u - P_n^{(x_0,t_0)}\psi\right| \leq cr^{n+\alpha}, \qquad r \in]0,R[, \quad \text{per } n = 0,1, \\ &\sup_{Q_r^-(x_0,t_0)} |u - \psi| \leq cr^2, \qquad r \in]0,R[, \quad \text{per } n = 2. \end{aligned} \tag{49}$$

Infatti dalle (49) segue in particolare che u verifica le ipotesi del Lemma 3.2 nel cilindro $Q_r^+(x_0,t_0)$ ed il risultato segue immediatamente dalla combinazione del Lemma 3.2 con (49).

Per provare le (49) si precede esattamente come nella prova del Lemma 3.2: si osserva che non è restrittivo considerare $(x_0,t_0) = (0,0), R = 1$ e $P_n^{(0,0)}\psi \equiv 0$. Sempre per l'Osservazione 2.1, è poi sufficiente dimostrare che

$$\sup_{Q_r^-(0,0)} |u| \le c r^\gamma, \qquad r \in]0,1[.$$

Si definisce la norma

$$S_k^-(u) = \sup_{Q_{2^{-k}}^-} |u|$$

invece di (11), e si suppone che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esista una funzione u_j tale che

$$S_{k_j+1}^-(u_j) > \max \left(\frac{jM_3}{2^{(k_j+1)\alpha}}, \frac{S_{k_j}^-(u_j)}{2^\alpha}, \frac{S_{k_j-1}^-(u_j)}{2^{2\alpha}}, \dots, \frac{S_0^-(u_j)}{2^{(k_j+1)\alpha}} \right).$$

Si prosegue seguendo il Passo 2 della dimostrazione del Lemma 3.2 e si verifica che risulta

$$\tilde{M}_1^j \le 2^{(l+1)\alpha}, \qquad \lim_{j\to\infty} \tilde{M}_2^j = \lim_{j\to\infty} \tilde{M}_3^j = 0 \tag{50}$$

invece di (37) e (40). Procediamo ora dettagliatamente con il terzo passo:

Passo 3 (Contraddizione). Sceglieremo l sufficientemente grande da raggiungere una contraddizione. In corrispondenza di l, scegliamo $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $k_j > 2^l$ per ogni $j \ge j_0$. Poniamo $\hat{g}_j$ uguale al valore di $\tilde{u}_j$ sul bordo $\partial_P Q_{2^l}^-$ e denotiamo con v_j e $\tilde{v}_j$ le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} \tilde{L}_j v_j = \|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^-, \\ v_j = \hat{g}_j & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^-, \\ \tilde{v}_j = \max\{\hat{g}_j, \tilde{M}_3^j\} & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-. \end{cases} \tag{51}$$

Dimostriamo che risulta

$$v_j \le \tilde{u}_j \le \tilde{v}_j \text{ in } Q_{2^l}^-. \tag{52}$$

La prima disuguaglianza in (52) segue dal principio del confronto. Per provare la seconda, osserviamo innanzitutto che $\|\tilde{\psi}_j\|_\infty \le \tilde{M}_3^j$ e quindi, per il principio del confronto, $\tilde{v}_j \ge \tilde{\psi}_j$ in $Q_{2^l}^-$. Inoltre

$$\tilde{L}_j(\tilde{v}_j - \tilde{u}_j) = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} + \tilde{f}_j \le 0 \quad \text{in} \quad \Omega := Q_{2^l}^- \cap \{(x,t) : \ \tilde{u}_j(x,t) > \tilde{\psi}_j(x,t)\},$$

e $\tilde{v}_j \ge \tilde{u}_j$ in $\partial\Omega$. La seconda disuguaglianza in (52) segue quindi dal principio del massimo.

Osserviamo che, poiché $\tilde{u}_j \geq \tilde{\psi}_j$ si ha $\hat{g}_j \geq -\tilde{M}_3^j$ in $Q_{2^l}^-$. Quindi, per il principio del confronto, si ha per ogni T positivo

$$\tilde{v}_j(x,t) - v_j(x,t) \leq \left(\max\{0, \tilde{M}_3^j - \hat{g}_j\} + 2T\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)}\right) \leq 2\left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j\right) \tag{53}$$

per ogni $(x,t) \in Q_{2^l}^-(0,0,T)$. Affermiamo ora che esiste una costante positiva C tale che

$$\tilde{v}_j(x,t) \geq C \quad \text{per ogni } (x,t) \in Q_{1/2}^-, \ j \geq j_0. \tag{54}$$

Una volta provata tale affermazione, da (53) e da (52) segue che

$$\tilde{u}_j(0,0) \geq v_j(0,0) \geq \tilde{v}_j(0,0) - 2\left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j\right) \geq C - 2\left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j\right).$$

Inoltre, utilizzando (50), si trova infine che $\tilde{u}_j(0,0) > 0$ per ogni j sufficientemente grande. questo fatto contraddice l'ipotesi che $\tilde{u}_j(0,0) = \tilde{\psi}_j(0,0) = 0$. Resta pertanto conclusa la dimostrazione per assurdo.

Per dimostrare la (54) utilizziamo i Lemmi 2.3 e 2.2 con $R = 1/2$ e

$$\tilde{R} = \left(\frac{2^l}{c}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} \tag{55}$$

dove c è la costante del Lemma 2.3. Rappresentiamo la funzione $\tilde{v}_j$ su $Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1)$ nel modo seguente: $\tilde{v}_j = w_j + \tilde{w}_j + \hat{w}_j$, dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j w_j = 0 & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \\ w_j = 0 & \text{su } \partial_P^+ Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \\ w_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^- Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{w}_j = 0 & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \\ \tilde{w}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^+ Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \\ \tilde{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P^- Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \hat{w}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1), \\ \hat{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q_{\tilde{R}}^-(0,0,1). \end{cases}$$

Per il principio del massimo si ha

$$0 \leq \hat{w}_j(x,t) \leq (t+1)\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} \leq \tilde{M}_2^j, \tag{56}$$

per ogni $(x,t) \in Q^-_{\tilde{R}}(0,0,1)$. Risulta quindi $|\hat{w}_j(x,t)| \leq 1/4$ in $Q^-_{\tilde{R}}(0,0,1)$ per ogni j sufficientemente grande e per ogni $t \in]-1,0[$. Poiché

$$\|\tilde{v}_j\|_{L^\infty\left(Q^-_{2^l}\right)} \leq \max\left\{2^{(l+1)\alpha}, \tilde{M}^j_3\right\} + 2^{2l}\tilde{M}^j_2,$$

per il Lemma 2.2 si trova

$$\sup_{Q^-_{1/2}} |\tilde{w}_j| \leq C_0 e^{-C_1\tilde{R}^2} \sup_{\partial^+_P Q^-_{\tilde{R}}} |v| \leq C_0 e^{-C_1\tilde{R}^2}\left(\max\left\{2^{(l+1)\alpha}, \tilde{M}^j_3\right\} + 2^{2l}\tilde{M}^j_2\right).$$

Notiamo poi che, per la nostra scelta di (55), il membro di destra della disuguaglianza tende a zero per $l \to \infty$. Ricordando che $\tilde{v}_j(\tilde{x}_j,\tilde{t}_j) \geq \tilde{u}_j(\tilde{x}_j,\tilde{t}_j) = 1$, possiamo concludere che, scegliendo l sufficientemente grande, otteniamo

$$w_j(\tilde{x}_j,\tilde{t}_j) \geq \frac{1}{2}, \qquad j \geq j_0.$$

Per il principio del massimo esiste almeno un punto $(\bar{x}_j,\bar{t}_j) \in \partial^-_P Q^-_{\tilde{R}}(0,0,1)$ tale che

$$\tilde{v}_j(\bar{x}_j,\bar{t}_j) = w_j(\bar{x}_j,\bar{t}_j) \geq \frac{1}{2}, \qquad j \geq j_0. \tag{57}$$

Scriviamo ora $\tilde{v}_j = \check{v}_j + \hat{v}_j$ dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j\check{v}_j = 0 & \text{in } Q^-_{2^l}(0,0,2), \\ \check{v}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P Q^-_{2^l}(0,0,2). \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{L}_j\hat{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q^-_{2^l})} & \text{in } Q^-_{2^l}(0,0,2), \\ \hat{v}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q^-_{2^l}(0,0,2). \end{cases}$$

Come in (56), è facile verificare che $|\hat{v}_j(x,t)| \leq 1/4$ in $Q^-_{2^l}(0,0,2)$ per j sufficientemente grande. Possiamo quindi concludere che

$$\check{v}_j(\bar{x}_j,\bar{t}_j) \geq \frac{1}{4}, \qquad j \geq j_0.$$

Per il Lemma 2.3 troviamo allora

$$\inf_{Q^-_{1/2}} \check{v}_j \geq \frac{1}{4\tilde{c}}.$$

Poiché $\hat{v}_j \to 0$ uniformemente in $Q^-_{2^l}(0,0,2)$, per $j \to \infty$, concludiamo che

$$\inf_{Q^-_{1/2}} \tilde{v}_j \geq \inf_{Q^-_{1/2}} \check{v}_j - \|\hat{v}_j\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{8\tilde{c}}$$

per ogni j sufficientemente grande. Questo conclude la prova di (54) e, quindi, la prova del Lemma 3.3 nel caso $n = 0$. Per $n = 1$ e 2 il procedimento è analogo. Per la dimostrazione dettagliata rimandiamo al lavoro [5]. $\square$

4. Prova dei Teoremi 1.1 e 1.2

La prova dei tre Teoremi si basa sull'applicazione dei Lemmi 3.1, 3.2 e 3.3. Ci limitiamo qui a riportare alcuni dettagli della prova del punto *(i)* dei Teoremi 1.1 e 1.2, rimandiamo ai lavori [5] e [12] per la dimostrazione completa.

Dimostrazione del Teorema 1.1-i). Fissiamo una costante $R\in]0,1[$ tale che $Q_{2R}\subseteq Q_{2RC_1}(\hat{x},\hat{t})\subseteq Q$ per ogni $(\hat{x},\hat{t})\in Q_{2R}$, dove C_1 è la costante in (20). Denotiamo $\mathscr{F}=\overline{Q}_{2R}\cap\{(x,t):u(x,t)=\psi(x,t)\}$. Se l'insieme $\mathscr{F}$ è vuoto, allora l'affermazione segue immediatamente dalle stime interne di Schauder (10). Supponiamo quindi che $\mathscr{F}$ non sia vuoto, e dimostriamo che esite una costante positiva $\hat{c}=\hat{c}(N,\lambda,\alpha,\mathbf{c}_\alpha,M_1,M_2,M_3)$ tale che

$$\sup_{\substack{(x,t),(\hat{x},\hat{t})\in Q_R\\(x,t)\neq(\hat{x},\hat{t})}}\frac{|u(x,t)-u(\hat{x},\hat{t})|}{\|(\hat{x},\hat{t})^{-1}\circ(x,t)\|_K^\alpha}\leq\hat{c}.\tag{58}$$

Se $(\hat{x},\hat{t})\in Q_{2R}\cap\mathscr{F}$, allora applichiamo il Lemma 3.2 e otteniamo

$$|u(x,t)-u(\hat{x},\hat{t})|\leq c\|(\hat{x},\hat{t})^{-1}\circ(x,t)\|_K^\alpha\qquad\text{for every }(x,t)\in Q_{2RC_1}(\hat{x},\hat{t}).\tag{59}$$

Lo stesso risultato vale ovviamente quando $(x,t)\in Q_R\cap\mathscr{F}$. Per concludere la dimostrazione del Teorema 1.1 supponiamo quindi che sia $(x,t),(\hat{x},\hat{t})\in Q_R\setminus\mathscr{F}$. Sia $r=d_K((x,t),\mathscr{F})$ la distanza di (x,t) da $\mathscr{F}$ definita in (21), e sia $(\tilde{x},\tilde{t})\in\mathscr{F}$ un punto tale che $r=d_K((x,t),(\tilde{x},\tilde{t}))$.

Caso 1. Supponiamo $(\hat{x},\hat{t})\in Q_R\setminus Q_{r/2}(x,t)$. Allora $d_K\big((x,t),(\hat{x},\hat{t})\big)>c_0r$ per una certa costante positiva c_0. Dalla disuguaglianza triangolare (19) segue allora

$$d_K((\hat{x},\hat{t}),(\tilde{x},\tilde{t}))\leq c\left(d_K((x,t),(\tilde{x},\tilde{t}))+c\,d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))\right).\tag{60}$$

Ricordando che $d_K((x,t),(\tilde{x},\tilde{t}))\leq\frac{1}{c_0}d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))$, ed utilizzando (59), si trova

$$\begin{aligned}|u(x,t)-u(\hat{x},\hat{t})|&\leq|u(x,t)-u(\tilde{x},\tilde{t})|+|u(\hat{x},\hat{t})-u(\tilde{x},\tilde{t})|\\&\leq c\left(d_K((x,t),(\tilde{x},\tilde{t}))^\alpha+d_K((\hat{x},\hat{t}),(\tilde{x},\tilde{t}))^\alpha\right)\leq\hat{c}\|(\hat{x},\hat{t})^{-1}\circ(x,t)\|_K^\alpha,\end{aligned}$$

per un'opportuna costante positivia $\hat{c}$ che dipende solo da c_0 e dalla costante c in (19).

Caso 2. Supponiamo che $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_{r/2}(x,t)$. Poniamo

$$v(\hat{x}, \hat{t}) = u(\hat{x}, \hat{t}) - u(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Dalla (60) segue che esiste una costante positiva c_1 tale che $|v(\hat{x}, \hat{t})| \leq c_1 r^\alpha$. Di conseguenza, la funzione $w(y,s) = \frac{v^{r,(x,t)}(y,s)}{r^\alpha}$ soddisa

$$|w(y,s)| \leq c_1 \quad \text{e} \quad L^{r,(x,t)} w(y,s) = r^{2-\alpha} f^{r,(x,t)}(y,s) \quad \text{per } (y,s) \in Q_{1/2}. \tag{61}$$

Pertanto, per le stime di Schauder (10), si ah

$$|w(y,s) - w(0,0)| \leq \hat{c}_1 \|(y,s)\|_K^\alpha,$$

per una costante positiva $\hat{c}_1$ che dipende solo da c_1 e dalla costante in (10). Quindi, se consideriamo il punto $(\hat{x}, \hat{t}) = (x,t) \circ \delta_r(y,s)$, troviamo

$$|u(\hat{x}, \hat{t}) - u(x,t)| \leq \hat{c}_1 \|(x,t)^{-1} \circ (\hat{x}, \hat{t})\|_K^\alpha.$$

Questo conclude la prova del Teorema 1.1-*i)*. $\square$

Dimostrazione del Teorema 1.2- i). Per la (20) esistono due costanti positive C_1 ed R tali che $Q_{2R} \subseteq Q_{2RC_1}(x,t) \subset Q$ per ogni $(x,t) \in Q_{2R}^+$. Grazie ad un elementare ragionamento di ricoprimento e all'Osservazione 3.1, è sufficiente considerare il caso di $\Omega = Q^+$ ed $\Omega' = Q_R^+$. Ci proponiamo di dimostrare che

$$\sup_{\substack{(x,t),(\hat{x},\hat{t}) \in Q_R^+ \\ (x,t) \neq (\hat{x},\hat{t})}} \frac{|u(x,t) - u(\hat{x}, \hat{t})|}{d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))^\alpha} \leq c, \tag{62}$$

per un'opportuna costante positiva $c = c\left(\alpha, L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)}, \|g\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)}, \|\psi\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)}\right)$.

Se $t = 0$ allora (62) segue dall'applicazione del Lemma 3.2 al cilindro $Q_{2RC_1}^+(x,0)$. Più precisamente, utilizziamo il fatto che

$$|u(\xi,\tau) - u(x,0)| \leq |u(\xi,\tau) - g(\xi,\tau)| + |g(\xi,\tau) - g(x,0)| \leq c\, d_K((\xi,\tau),(x,0))^\alpha, \tag{63}$$

in quanto $g \in C_K^{0,\alpha}(Q)$. Ovviamente, quanto appena detto vale anche per $\hat{t} = 0$, pertanto non ci resta che considerare il caso in cui t e $\hat{t}$ sono strettamente positivi. Poniamo $(\tilde{x}, 0) = (x,t) \circ (0,t)^{-1} = (E(-t)x, 0)$ in modo che risulti $d_K((x,t),(\tilde{x},0)) = \sqrt{t}$.

Caso 1. Supponiamo $(\hat{x},\hat{t}) \in Q_R^+ \setminus Q_{\frac{\sqrt{t}}{2}}(x,t)$. Si ha allora

$$
\begin{aligned}
&d_K((\hat{x},\hat{t}),(\tilde{x},0)) \le c\left(d_K((x,t),(\tilde{x},0)) + d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))\right) \le 2c\, d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t})),\\
&d_K((x,t),(\tilde{x},0)) \le 2\, d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t})).
\end{aligned} \tag{64}
$$

Pertanto

$$|u(x,t) - u(\hat{x},\hat{t})| \le |u(x,t) - u(\tilde{x},0)| + |u(\hat{x},\hat{t}) - u(\tilde{x},0)| \le$$

(per la (63))

$$\le c_1\left(d_K((x,t),(\tilde{x},0))^\alpha + d_K((\hat{x},\hat{t}),(\tilde{x},0))^\alpha\right)$$

(per la (64))

$$\le c_2 d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))^\alpha.$$

Caso 2. Supponiamo $(\hat{x},\hat{t}) \in Q_R^+ \cap Q_{\frac{\sqrt{t}}{2}}(x,t)$ ed osserviamo che $Q_{\sqrt{t}}(x,t) \subseteq Q_{2R}^+$. Sempre per la (63), si ha

$$\|u - u(x,t)\|_{L^\infty\left(Q_{\sqrt{t}}(x,t)\right)} \le \|u - u(\tilde{x},0)\|_{L^\infty\left(Q_{\sqrt{t}}(x,t)\right)} + |u(x,t) - u(\tilde{x},0)| \le c t^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Ponaimo allora

$$v(y,s) = \frac{u((x,t)\circ\delta_{\sqrt{t}}(y,s)) - u(x,t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}, \qquad (y,s) \in Q. \tag{65}$$

Per le stime precedenti si ha $\|v\|_{L^\infty(Q)} \le c$ e quindi, utilizzando il punti *i)* del Teorema 1.1, si ottiene

$$|v(y,s)| \le c_3 \|(y,s)\|_K^\alpha, \qquad \text{per ogni } (y,s) \in Q_{1/2}.$$

Invertendo il cambiamento di variabile si verifica che la precedente disuguaglianza è equivalente alla seguente

$$|u(x,t) - u(\hat{x},\hat{t})| \le c_3 d_K((x,t),(\hat{x},\hat{t}))^\alpha.$$

Questo conclude la prova del Teorema 1.2-*i)*. □

Riferimenti bibliografici

[1] A. Bensoussan, *On the theory of option pricing*, Acta Appl. Math., 2 (1984), pp. 139–158.

[2] L. Caffarelli, A. Petrosyan, and H. Shahgholian, *Regularity of a free boundary in parabolic potential theory*, J. Amer. Math. Soc., 17 (2004), pp. 827–869 (electronic).

[3] M. Di Francesco, A. Pascucci, and S. Polidoro, *The obstacle problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 464 (2008), pp. 155–176.

[4] M. Di Francesco and S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov-type operators in non-divergence form*, Adv. Differential Equations, 11 (2006), pp. 1261–1320.

[5] M. Frentz, K. Nyström, A. Pascucci, and S. Polidoro, *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options*, in corso di stampa su Math. Ann., (2009).

[6] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[7] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre, *Variational inequalities and the pricing of American options*, Acta Appl. Math., 21 (1990), pp. 263–289.

[8] I. Karatzas, *On the pricing of American options*, Appl. Math. Optim., 17 (1988), pp. 37–60.

[9] E. Lanconelli and S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63.

[10] M. Manfredini, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, Adv. Differential Equations, 2 (1997), pp. 831–866.

[11] K. Nyström, *On the behaviour near expiry for multi-dimensional American options*, J. Math. Anal. Appl., 339 (2008), pp. 644–654.

[12] K. Nyström, A. Pascucci, and S. Polidoro, *Regularity near the Initial State in the Obstacle Problem for a class of Hypoelliptic Ultraparabolic Operators*, (sottoposto ad una rivista), (2009).

[13] A. Pascucci, *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options*, Finance Stoch., 12 (2008), pp. 21–41.

[14] A. Petrosyan and H. Shahgholian, *Parabolic obstacle problems applied to finance*, in Recent developments in nonlinear partial differential equations, vol. 439 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 117–133.

[15] H. Shahgholian, *Free boundary regularity close to initial state for parabolic obstacle problem*, Trans. Amer. Math. Soc., 360 (2008), pp. 2077–2087.