

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2009-10

Martino Vittorio

UNA TRASFORMATA DI LEGENDRE SU UN MODELLO
NON STANDARD

11 Febbraio 2010

ABSTRACT

We consider an exotic contact form α on S^3 and we establish explicitly the existence of a non singular vector field v in $\ker(\alpha)$ such that the non-singular one-differential form $\beta(\cdot) := d\alpha(v, \cdot)$ is a contact form on S^3 with the same orientation than α . In particular this means that a Legendre transform can be completed.

1. INTRODUZIONE

In questo seminario dimostreremo un risultato riguardante l'esistenza di un particolare campo vettoriale nel nucleo di una forma di contatto overtwisted su S^3 . Sia allora $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, e $r_1 = x_1^2 + x_2^2$, $r_2 = x_3^2 + x_4^2$. La sfera unitaria tridimensionale è:

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : r_1 + r_2 = 1\}$$

Ricordiamo un risultato di J.Gonzalo e F.Varela ([7]):

Teorema 1.1. *La forma differenziale su S^3*

$$\alpha = -\left(A(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + B(x_4 dx_3 - x_3 dx_4)\right)$$

con

$$A := \cos \theta, \quad B := \sin \theta, \quad \theta := \frac{\pi}{4} + \pi r_2$$

è *overtwisted*.

Enunciamo il nostro teorema ([9]):

Teorema 1.2.

(i) $\exists v \in TS^3$, un campo non singolare, tale che $v \in \ker(\alpha)$;

(ii) la forma differenziale $\beta(\cdot) := d\alpha(v, \cdot)$ è una forma di contatto su S^3 con la stessa orientazione di α .

Il precedente risultato si inserisce naturalmente nella teoria variazionale sviluppata da A.Bahri in una serie di lavori (ad esempio [1],[2],[3]) riguardo la geometria delle forme di contatto. In particolare questa teoria prende spunto dal problema più ampio che riguarda l'esistenza di soluzioni periodiche di sistemi Hamiltoniani.

Si consideri un sistema dinamico descritto da una funzione Hamiltoniana (che supporremo sempre regolare quanto basta) che dipenda dalle posizioni e dai momenti

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z = (q, p) \longmapsto H(q, p)$$

e si definisca il funzionale azione

$$A(z) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\langle p, \dot{q} \rangle - H(q, p) \right) dt, \quad z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

Facendo la variazione prima di A su un opportuno spazio di curve (fissate le posizioni), si ottiene che i punti critici di A devono soddisfare il seguente sistema di equazioni (di Hamilton)

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q, p) \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q, p) \end{cases} \quad k = 1, \dots, n$$

Il principio variazionale di Minima Azione stabilisce che le traiettorie del moto sono soluzioni di (1). A questo punto usando delle proprietà di convessità di A è possibile ottenere dei risultati di esistenza di soluzioni di (1). Ricordiamo anche che fissando una condizione iniziale z_0 il Problema di Cauchy associato a (1) è ben definito e autonomo (H è indipendente dal tempo) e quindi la soluzione è definita per tutti i tempi.

Introduciamo alcune notazioni e definizioni. Chiamiamo forma differenziale di Liouville in \mathbb{R}^{2n} la seguente 1-forma:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_k (p_k dq_k - q_k dp_k)$$

La forma simplettica canonica in \mathbb{R}^{2n} sarà:

$$\omega_0 := d\lambda = \sum_k (dp_k \wedge dq_k)$$

Vale

$$\lambda(v) = \frac{1}{2} \langle Jz, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2n}$$

e

$$\omega_0(v, Ju) = d\lambda(v, Ju) = \langle v, u \rangle, \quad \forall v, u \in \mathbb{R}^{2n}$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice simplettica canonica in \mathbb{R}^{2n} . La superficie isoenergetica di H è la seguente ipersuperficie in \mathbb{R}^{2n} :

$$M = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : H(z) = E\}, \quad \dim(M) = 2n - 1$$

che supporremo essere sempre regolare ($\nabla H \neq 0$ su M). Il principio di conservazione dell'energia assicura che se z è critico per A , allora $z(t) \in M, \forall t \in [t_0, t_1]$. Se inoltre definiamo il campo Hamiltoniano come il seguente campo tangente ad M

$$X_z^H := \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q, p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \right) = J \cdot \nabla H(q, p)$$

allora le equazioni di Hamilton (1) si riscrivono semplicemente

$$\dot{z} = X_z^H$$

Infine introduciamo anche il flusso Hamiltoniano:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi^t(z) = X_{\varphi^t(z)}^H \\ \varphi^0(z) = z \end{cases}$$

A questo punto ci si pone il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche di (1), in altre parole ci si chiede l'esistenza o meno di orbite chiuse del moto. La motivazione di questo problema (e in un certo senso la "ben posizione") può essere fatta risalire alla seguente proprietà di ricorrenza delle traiettorie del moto:

Teorema - di ricorrenza (H.Poincaré, 1890)

Sia M regolare e compatta. Allora per q.o. $z \in M$ esiste $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} > 0, \nearrow \infty$, tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(z) = z$$

Quindi tutte le condizioni iniziali, tranne un insieme di misura nulla (rispetto alla misura di superficie), danno luogo a orbite asintoticamente periodiche. Un famoso risultato di C.Pugh e C.Robinson ([10]) che va sotto il nome di Closing Lemma dimostra che perturbando H nella classe delle funzioni C^2 , le orbite periodiche sono dense su una superficie isoenergetica regolare e compatta: cioè, partendo da una condizione iniziale di un'orbita asintoticamente periodica, è possibile perturbare M in maniera regolare, in modo

tale che l'orbita si “chiuda” in un tempo finito. Comunque, se ci si ferma a considerare la Hamiltoniana di partenza (senza cioè ammettere perturbazioni), allora il seguente problema

Sia M regolare e compatta. Esistono orbite periodiche di X^H ?

è ancora aperto.

Vogliamo notare esplicitamente che il problema dipende solo da M e dalla struttura simplettica J , infatti se \tilde{H} è un'altra Hamiltoniana che definisce (come insieme di livello) M , allora i campi $X^H = J \cdot \nabla H$ e $X^{\tilde{H}} = J \cdot \nabla \tilde{H}$ sono paralleli, quindi a meno di riparametizzazioni, le orbite coincidono. Notiamo inoltre che la compattezza è essenziale per il problema, in quanto è possibile trovare dei controesempi di ipersuperfici non compatte in cui tutte le orbite di X^H sono aperte.

A questo punto la formulazione variazionale, considerando l'azione A su un opportuno insieme di curve chiuse, possiede un principio di Minima Azione altamente degenere, cioè: le traiettorie del moto sono ancora punti critici di A , ma questi sono tutti punti di sella, in particolare A non possiede massimi o minimi; inoltre l'indice di Morse di tutti i punti critici è infinito e questo sembra escludere la possibilità di un calcolo omologico.

Diamo adesso una formulazione geometrica del problema. Restringendo ω_0 su M , vale

$$\text{rank}(\omega_0|_{TM}) = 2n - 2 \quad \Rightarrow \quad \ker(\omega_0|_{TM}) = 1$$

Definiamo il seguente sottospazio di TM , dei campi caratteristici:

$$K_z = \{\xi \in T_z M : \omega_0(v, \xi) = 0, \forall v \in T_z M\}$$

Una curva $\gamma \subseteq M$, tale che $\dot{\gamma} \in K_\gamma$ si dirà una (curva) caratteristica su M . Poiché

$$\omega_0(v, X^H) = \omega_0(v, J \cdot \nabla H) = \langle v, \nabla H \rangle = 0, \quad \forall v \in TM$$

allora $X_z^H \in K_z$, $\forall z \in M$ e le orbite di X^H sono delle caratteristiche su M . Quindi il problema si può riformulare così:

Sia M regolare e compatta. Esistono caratteristiche chiuse su M ?

Inoltre, esiste anche una “versione complessa” del problema. Infatti, sia $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare, con $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_k = x + iy \simeq (x_k, y_k)$, allora la seguente

ipersuperficie

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}, \quad \dim(M) = 2n - 1$$

ha una naturale decomposizione dello spazio tangente in una parte orizzontale HM (la distribuzione massimale di Levi, di dimensione $2n - 2$) e una restante direzione verticale (o caratteristica) T :

$$TM = HM \oplus \mathbb{R}T$$

La parte orizzontale si può ottenere ad esempio restringendo ad M lo spazio dei campi olomorfi di \mathbb{C}^n ; quindi se J è la struttura complessa canonica su \mathbb{C}^n (J coincide con la matrice simplettica definita precedentemente), allora HM è invariante per l'azione di J . Così per individuare la direzione caratteristica T basta prendere l'immagine della direzione normale N mediante J :

$$N = \nabla f \quad \Rightarrow \quad T = J \cdot N = J \cdot \nabla f$$

Notiamo anche in questo caso che T dipende solo da M e dalla struttura complessa J . Se adesso si pone $(x_k, y_k) = (q_k, p_k)$ e $f(z) = H(z) - E$, allora le curve integrali di T coincidono con le curve integrali di X^H .

I primi due risultati rilevanti nello studio dell'esistenza di orbite chiuse del campo Hamiltoniano (entrambi del 1978) sono il teorema di A.Weinstein ([13])

Teorema 1.3. *Sia M regolare, compatta e convessa (bordo di un dominio convesso in \mathbb{R}^{2n}). Allora X^H ammette orbite periodiche*

e il più generale teorema di P.Rabinowitz ([11])

Teorema 1.4. *Sia M regolare, compatta e stellata (bordo di un dominio stellato in \mathbb{R}^{2n}). Allora X^H ammette orbite periodiche.*

In particolare, il secondo risultato è ottenuto utilizzando il principio variazionale (degenere) mediante un argomento di tipo minimax. Una proprietà fondamentale delle ipersuperfici stellate (ad esempio rispetto all'origine) è la seguente:

$$(2) \quad \lambda(X_z^H) = \frac{1}{2} \langle J \cdot z, J \cdot \nabla H(z) \rangle = \frac{1}{2} \langle z, \nabla H(z) \rangle \neq 0$$

Ricordiamo adesso che una 1-forma differenziale α su una varietà M , con $\dim(M) = 2n-1$, si dice di contatto se

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$$

Usando la proprietà (2) è facile ottenere il seguente

Lemma. *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ una ipersuperficie regolare e compatta.*

Se M è stellata allora la forma $\lambda|_M$ è di contatto su M

che unito al risultato di P.Rabinowitz dice in un certo senso che gli oggetti su cui cercare caratteristiche chiuse sono varietà di contatto. Nel 1987, C.Viterbo ([12]) dimostra l'esistenza di caratteristiche chiuse per tutte le ipersuperfici M compatte di tipo contatto in \mathbb{R}^{2n} , cioè ipersuperfici M per cui esiste una forma α tale che $\alpha(X_z^H) \neq 0$ e $d\alpha = d\lambda = \omega_0$ su M . Poiché esistono varietà di tipo contatto che non sono stellate vale

$$\text{Viterbo} \quad \Rightarrow \quad \text{Rabinowitz} \quad \Rightarrow \quad \text{Weinstein}$$

È possibile formulare il problema da un punto di vista intrinseco sulle varietà di contatto introducendo la seguente definizione

Definizione. *Sia M una varietà dotata di una forma di contatto α . L'unico campo $\xi \in TM$ tale che*

$$\alpha(\xi) = 1 \quad e \quad d\alpha(\xi, \cdot) = 0$$

si chiama campo di Reeb di α .

In questo modo considerando direttamente una varietà di contatto non si richiede più che la forma $d\alpha$ sia la restrizione di una qualche forma symplettica. Nel 1993, H.Hofer ([8]) dimostra l'esistenza di orbite periodiche del campo di Reeb per una qualsiasi forma di contatto sulla sfera tridimensionale. Ricordiamo che su una varietà tridimensionale, le forme di contatto si dividono in due categorie: *tight e overtwisted*; le strutture di contatto delle prime si chiamano standard, quelle derivanti dalle seconde non-standard (o esotiche). Si vedano ad esempio ([5],[6],[4]) per definizioni e risultati.

La forma di contatto (tight) canonica

$$\alpha_0 = (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + (x_4 dx_3 - x_3 dx_4)$$

su S^3 è il pull-back della forma di Liouville sul fibrato cotangente unitario di S^2 . La trasformata di Legendre per la forma di Liouville può essere vista come il dato di un campo vettoriale v in $\ker(\alpha_0)$ tale che la forma differenziale duale $\beta_0(\cdot) := d\alpha_0(v, \cdot)$ sia una forma di contatto con la stessa orientazione di α_0 .

La trasformata di Legendre ovviamente permette di trasformare un problema Hamiltoniano sulla sfera cotangente di S^2 in un problema Lagrangiano. Questa dualità è stata generalizzata da A.Bahri in ([1]) alla situazione più generale delle forme di contatto α di qualsiasi tipo su varietà orientabili tridimensionali M , compatte senza bordo; portando così allo studio di problemi variazionali su opportuni spazi di curve. Infatti, si assuma che:

(i) $\exists v \in TM$, un campo non degenere, tale che $v \in \ker(\alpha)$

(ii) la forma differenziale non singolare $\beta(\cdot) := d\alpha(v, \cdot)$ è una forma di contatto su M con la stessa orientazione di α

e si definisca il funzionale azione

$$(3) \quad A(\gamma) = \int_0^1 \alpha(\dot{\gamma}) dt$$

sul sottospazio degli H^1 -cappi di M :

$$C_\beta = \{\gamma \in H^1(S^1; M) : \beta(\dot{\gamma}) = 0; \alpha(\dot{\gamma}) = c_\gamma = \text{costante positiva}\}$$

Se $\xi \in TM$ denota il campo di Reeb di α , allora vale il seguente risultato di A.Bahri-D.Bennequin ([1]):

Teorema 1.5. *A è un funzionale di classe C^2 su C_β i cui punti critici sono orbite periodiche di ξ , di indice di Morse finito.*

È importante osservare che questa costruzione è “stabile sotto perturbazione”, cioè lo stesso v può essere usato per costruire la dualità di Legendre per forme del tipo $\mu\alpha$, con $\mu \in C^2$ e $|\mu - 1|$ piccolo.

A questo punto, poiché per qualsiasi forma di contatto tight, le ipotesi (i), (ii) sono facilmente soddisfatte, restava aperta la questione dell’esistenza di un tale v per forme di

contatto overtwisted. Nel lavoro ([9]) si stabilisce l'esistenza esplicita di un tale v , per la forma di contatto α su S^3 , introdotta da J.Gonzalo-F.Varela in ([7]), che definisce una struttura di contatto non-standard (o esotica) su S^3 .

2. VERIFICA DELL'IPOTESI (i)

Da ora in poi considereremo S^3 come sottovarietà immersa in \mathbb{R}^4 . Sia allora $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, denotando

$$r_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad r_2 = x_3^2 + x_4^2$$

si ha

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : r_1 + r_2 = 1\}$$

e su S^3 consideriamo la forma di contatto non-standard (o esotica) α introdotta da J.Gonzalo e F.Varela in ([7], caso $n = 1$):

$$\alpha = -\left(A(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + B(x_4 dx_3 - x_3 dx_4)\right)$$

dove

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi r_2, \quad A = \cos \theta, \quad B = \sin \theta$$

Ora, denotando

$$\tilde{A} = A + \pi r_1 B = \frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 A) \quad \tilde{B} = B + \pi r_2 A = \frac{\partial}{\partial r_2}(r_2 B)$$

allora con un calcolo diretto si ottiene

$$(4) \quad d\alpha = 2\left(\tilde{A} dx_1 \wedge dx_2 + \tilde{B} dx_3 \wedge dx_4\right)$$

Adesso, se

$$\zeta = -\left(\tilde{B}(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) + \tilde{A}(x_4 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_4})\right)$$

allora $\zeta \in T(S^3)$ e vale¹

$$(5) \quad \alpha(\zeta) = A\tilde{B}r_1 + B\tilde{A}r_2 > 0, \quad d\alpha(\zeta, \cdot) = 0$$

Quindi il campo di Reeb di α è

$$(6) \quad \xi = \frac{\zeta}{\alpha(\zeta)}$$

¹Vedi Appendice A

Definiamo ora il seguente campo non singolare² in $T(S^3)$

$$(7) \quad T = -\left(A(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + B(x_4\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_4})\right)$$

In questo modo si ha

$$(8) \quad \alpha(\cdot) = \langle T, \cdot \rangle$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è l'usuale prodotto interno in \mathbb{R}^4 . In altre parole, un campo è nel nucleo di α se è ortogonale a T .

Teorema 2.1. *Sia $R := |T|$, dove*

$$|T|^2 = \langle T, T \rangle = \alpha(T) = A^2r_1 + B^2r_2 > 0$$

Ponendo $C = A/R$ e $D = B/R$ definiamo il seguente campo vettoriale

$$v = v_1\partial_{x_1} + v_2\partial_{x_2} + v_3\partial_{x_3} + v_4\partial_{x_4}$$

con

$$(9) \quad \begin{cases} v_1 = x_3 \frac{(x_1^2 - Dx_2^2)}{r_1} + \frac{(x_1x_2x_4)}{r_1}(1 + D) \\ v_2 = x_4 \frac{(x_2^2 - Dx_1^2)}{r_1} + \frac{(x_1x_2x_3)}{r_1}(1 + D) \\ v_3 = -x_1 \frac{(x_3^2 + Cx_4^2)}{r_2} - \frac{(x_2x_3x_4)}{r_2}(1 - C) \\ v_4 = -x_2 \frac{(x_4^2 + Cx_3^2)}{r_2} - \frac{(x_1x_3x_4)}{r_2}(1 - C) \end{cases}$$

Allora $v \in T(S^3)$, $|v| = 1$ e $v \in \ker(\alpha)$, così la condizione (i) è soddisfatta.

Dimostrazione. Definiamo

$$(10) \quad M = S^3 \setminus (\{r_1 = 0\} \cup \{r_2 = 0\})$$

²Vedi Appendice A

e

$$(11) \quad T^2 = \{r_1 = c_1, r_2 = c_2, c_1 + c_2 = 1, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0\}$$

Così T^2 sono tori invarianti per ξ (cioè $\xi \in T(T^2)$) e M è la sfera senza i due tori degeneri (circonferenze). Inoltre, anche il campo T è tangente a T^2 . Ora introduciamo i seguenti campi tangenti a $T(M)$

$$(12) \quad X = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(D r_2 (x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) - C r_1 (x_4 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_4}) \right)$$

$$(13) \quad Y = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(r_2 (x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2}) - r_1 (x_3 \partial_{x_3} + x_4 \partial_{x_4}) \right)$$

Vale:

$$|X| = |Y| = 1$$

quindi X, Y sono non degeneri su M . Inoltre $X, Y \in \ker(\alpha)$, in particolare $X \in T(T^2)$ e $Y \in N(T^2)$ (lo spazio normale a T^2). Con i seguenti coefficienti

$$(14) \quad a = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} (x_1 x_3 + x_2 x_4), \quad b = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} (x_1 x_4 - x_2 x_3), \quad a^2 + b^2 = 1$$

definiamo

$$(15) \quad v = aY + bX$$

In questo modo $v \in \ker(\alpha)$, $|v| = 1$ e da un calcolo diretto si trovano i coefficienti in (9).

Si noti che v è definito solo su M . Poiché

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} C = - \lim_{r_1 \rightarrow 0} D = 1$$

su $r_1 = 0$ si ha

$$v = x_3 \partial_{x_1} + x_4 \partial_{x_2}$$

mentre su $r_2 = 0$ si ottiene

$$v = -x_1 \partial_{x_3} - x_2 \partial_{x_4}$$

quindi, per continuità, v è definito su tutta S^3 . □

Corollario 2.1. *Allo stesso modo se definiamo il campo*

$$w = w_1\partial_{x_1} + w_2\partial_{x_2} + w_3\partial_{x_3} + w_4\partial_{x_4}$$

con

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = -x_4 \frac{(x_1^2 - Dx_2^2)}{r_1} + \frac{(x_1x_2x_3)}{r_1}(1 + D) \\ w_2 = x_3 \frac{(x_2^2 - Dx_1^2)}{r_1} - \frac{(x_1x_2x_4)}{r_1}(1 + D) \\ w_3 = -x_2 \frac{(x_3^2 + Cx_4^2)}{r_2} + \frac{(x_1x_3x_4)}{r_2}(1 - C) \\ w_4 = x_1 \frac{(x_4^2 + Cx_3^2)}{r_2} - \frac{(x_2x_3x_4)}{r_2}(1 - C) \end{array} \right.$$

Allora $w \in T(S^3)$, $|w| = 1$, $w \in \ker(\alpha)$ e $w \perp v$.

Dimostrazione. La dimostrazione è come in (2.1), con

$$(17) \quad w = aX - bY$$

Così $w \perp v$, $w \in \ker(\alpha)$, $|w| = 1$. Inoltre su $r_1 = 0$ si ha

$$w = -x_4\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2}$$

mentre su $r_2 = 0$ si ottiene

$$w = -x_2\partial_{x_3} + x_1\partial_{x_4}$$

□

Osservazione 2.1. *Vogliamo sottolineare che i (coefficienti dei) campi v, w sono per costruzione solo C^0 .*

3. VERIFICA DELL'IPOTESI (ii)

Consideriamo adesso la 1-forma differenziale

$$(18) \quad \beta(\cdot) := d\alpha(v, \cdot)$$

Sia $h := \alpha(\zeta)$, allora

$$d\alpha(v, w) = d\alpha(aY + bX, aX - bY) = (a^2 + b^2)d\alpha(Y, X) = d\alpha(Y, X) = -\frac{2}{|T|}h < 0$$

e

$$\alpha \wedge d\alpha(\zeta, v, w) = hd\alpha(v, w) < 0$$

Inoltre³

$$\beta \wedge d\beta(\zeta, v, w) = \beta(w)d\beta(\zeta, v) = -d\alpha(v, w)d\alpha(v, [\zeta, v])$$

Così

$$(19) \quad \frac{\beta \wedge d\beta(\zeta, v, w)}{\alpha \wedge d\alpha(\zeta, v, w)} = \frac{-d\alpha(v, [\zeta, v])}{h}$$

Teorema 3.1. $d\alpha(v, [\zeta, v]) < 0$, e la condizione (ii) è soddisfatta.

Dimostrazione. Da un calcolo diretto si trova che

$$[\zeta, v] = (\tilde{A} - \tilde{B})w + 2\pi(x_1x_3 + x_2x_4)\{-(2A - \pi r_2 B)(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + (2B - \pi r_1 A)(x_4\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_4})\}$$

e

$$(20) \quad \lim_{r_1 \rightarrow 0} [\zeta, v] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-x_4\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2}), \quad \lim_{r_2 \rightarrow 0} [\zeta, v] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-x_2\partial_{x_3} + x_1\partial_{x_4})$$

Definendo

$$K := \tilde{A}(\pi r_2 B - 2A) + \tilde{B}(\pi r_1 A - 2B)$$

allora si ottiene

$$d\alpha(v, [\zeta, v]) = -2\left\{(\tilde{A} - \tilde{B})\frac{h}{R} + 2\pi a^2 r_1 r_2 K\right\} =: -2Q$$

e $Q > 0^4$. □

³Il campo v è C^0 quindi per calcolare $[\zeta, v]$ bisognerebbe regolarizzare v , vedi Appendice B

⁴Vedi Appendice A

4. APPENDICE A

Mostriamo qui l'andamento (in particolare la non-negatività) di alcune funzioni definite precedentemente. Si ponga $x := r_2$.

Studiamo $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

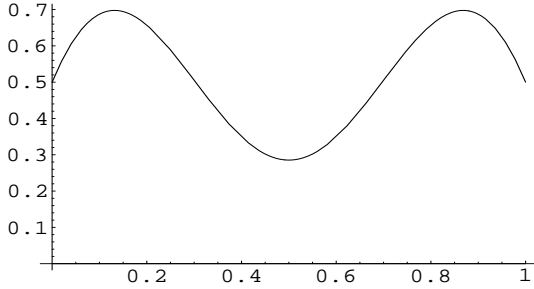
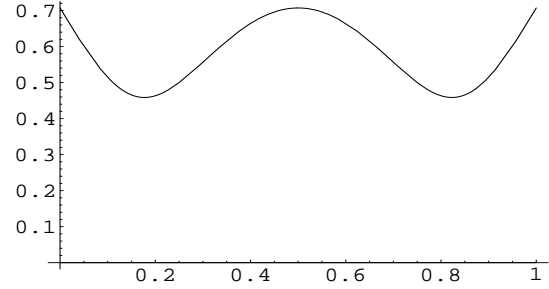
$$h(x) := \alpha(\zeta(x)) = A(x)\tilde{B}(x)(1-x) + B(x)\tilde{A}(x)x = \frac{\sin(2\theta(x))}{2} + \pi(x-x^2)$$

dove $\theta(x) = \pi(\frac{1}{4} + x)$. poiché h è simmetrica rispetto a $x = 1/2$, possiamo considerarla solo per $x \in [0, 1/2]$. Allora:

$$h'(x) = \pi(\cos(2\theta(x)) + 1 - 2x)$$

$$h''(x) = -2\pi(\pi \sin(2\theta(x)) + 1) = -2\pi(\pi \cos(2\pi x) + 1)$$

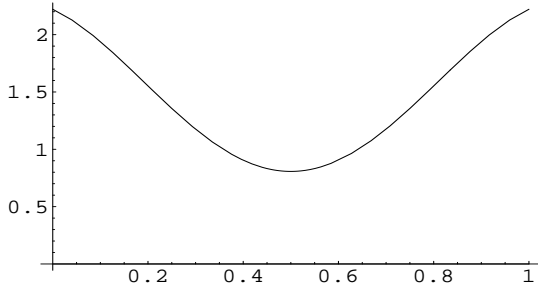
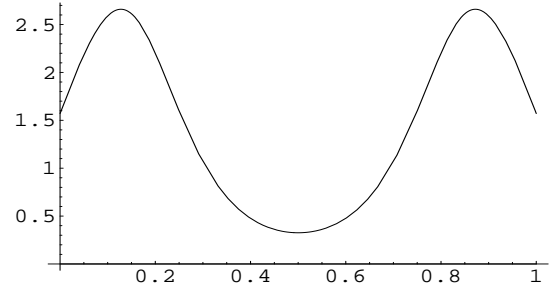
quindi esiste c_1 , con $1/4 < c_1 < 1/2$ tale che h'' è positiva su $(c_1, 1/2)$ e h' è crescente su $(c_1, 1/2)$. Inoltre $h'(1/2) = 0$. Quindi esiste c_2 , con $0 < c_2 < c_1 < 1/2$ tale che $h'(c_2) = 0$ e h è crescente su $(0, c_2)$. Infine, poiché $h(0) = 1/2$, il minimo di h è $h(1/2) = -1/2 + \pi/4 > 0$. Vale anche $R(x) := |T(x)| > 0$. Infatti

(a) h (b) R

$$R^2(x) = |T(x)|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \alpha(T(x)) = A^2(x)(1-x) + B^2(x)x \geq 0$$

e le quantità $A^2(x)(1-x)$ e $B^2(x)x$ non possono essere nulle contemporaneamente. Proveremo adesso che $Q(x) = (\tilde{A} - \tilde{B})\frac{h}{R} + 2\pi a^2 r_1 r_2 K > 0$ per $x \in [0, 1]$ mostrando i grafici di alcune funzioni (è possibile un calcolo diretto, come per le funzioni h, R , per localizzare i punti critici). Se

$$H(x) := (\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x))\frac{h(x)}{R(x)}$$

(c) $\tilde{A} - \tilde{B}$ (d) H

allora dove K è positiva vale $Q > 0$.

Altrimenti, se definiamo

$$G := 2\pi r_1 r_2, \quad G(x) = 2\pi(x - x^2)$$

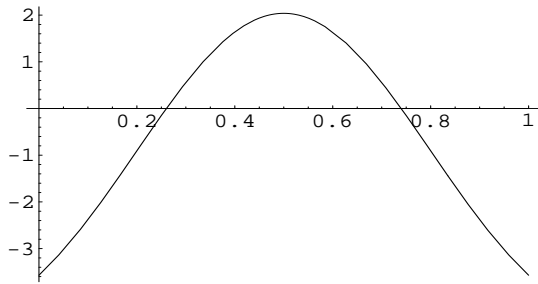
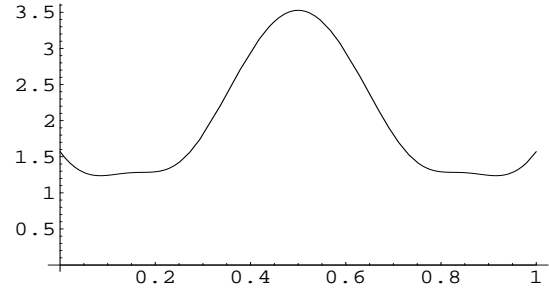
poiché $a^2 \leq 1$, dove K è negativa si ha

$$2\pi a^2 r_1 r_2 K \geq GK$$

Quindi, dove K è negativa, vale

$$Q(x) \geq H(x) + G(x)K(x) =: W(x)$$

e quindi $Q > 0$, per ogni $x \in [0, 1]$.

(e) K (f) W

5. APPENDICE B

In questa appendice vogliamo mostrare come regolarizzare il campo v . Gli unici problemi sono sulle circonferenze $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, altrimenti v è un campo di classe C^∞ . Consideriamo il caso $r_1 = 0$, l'altro è simile. Sia \mathcal{U} un intorno tubolare di $r_1 = 0$ e consideriamo

su \mathcal{U} una base $\{v_1, v_2\}$ di $\ker(\alpha)$ con $v_1, v_2 \in C^\infty$ (non è difficile trovare un campo locale di classe C^∞). Allora

$$(21) \quad v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

con $a_1, a_2 \in C^0$. Dopo avere effettuato una convoluzione con classici mollificatori si trovano $a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon \in C^\infty$ su \mathcal{U} , con $\varepsilon > 0$. A questo punto si definisce il campo di classe C^∞

$$(22) \quad v^\varepsilon = a_1^\varepsilon v_1 + a_2^\varepsilon v_2$$

Ora, dalle formule (20) è già noto che il campo $[\zeta, v] \in C^0$, allora usando

$$|\zeta(a_1^\varepsilon) - \zeta(a_1)| = o(1), \quad |\zeta(a_2^\varepsilon) - \zeta(a_2)| = o(1), \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

si ottiene su \mathcal{U}

$$[\zeta, v] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\zeta, v^\varepsilon]$$

Infine, per calcolare $\beta \wedge d\beta$, usiamo

$$d\alpha(v, [\zeta, v]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d\alpha(v^\varepsilon, [\zeta, v^\varepsilon])$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A.BAHRI, *Pseudo-orbits of contact forms*, Pitman Research Notes in Mathematics Series (173), Longman Scientific and Technical, Longman, London, 1988
- [2] A.BAHRI, *Compactness*, Adv. Nonlinear Stud. 8, no. 3, pp. 465-568, 2008
- [3] A.BAHRI, *Flow lines and algebraic invariants in contact form geometry*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 53. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
- [4] D.BENNEQUIN, *Entrelacements et quations de Pfaff*, Astrisque, 107-108, Soc. Math. France, Paris, 1983.
- [5] Y.ELIASHBERG, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989), no. 3, 623-637.
- [6] Y.ELIASHBERG, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992), no. 1-2, 165-192.
- [7] J.GONZALO, F.VARELA, *Modèles globaux des variétés de contact*, Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982), Astérisque, no.107-108, pp. 163-168, Soc. Math.France, Paris, 1983
- [8] H.HOFER, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. 114 (1993), no. 3, 515-563.

- [9] V.MARTINO, *A Legendre transform on an exotic S^3* , to appear in *Advanced Nonlinear Studies*
- [10] C.PUGH, C.ROBINSON , *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 3 (1983), no. 2, 261–313.
- [11] P.RABINOWITZ, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, *Comm. Pure Appl. Math.* 31 (1978), no. 2, 157–184.
- [12] C.VITERBO, *A proof of Weinstein's conjecture in R^{2n}* , *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 4 (1987), no. 4, 337–356.
- [13] A.WEINSTEIN, *Periodic orbits for convex Hamiltonian systems*, *Ann. of Math. (2)* 108 (1978), no. 3, 507–518.