Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2009-10

Angelo Favini

Risultati di perturbazione per operatori lineari multivoci ed applicazioni

21 gennaio 2010

Abstract

Pertubation results for generators of infinitely differentiable semigroups of linear operators are given. Some application to partial differential equations are described.

All'inizio di questo ciclo di seminari, voglio ricordare il Professor Bruno Pini, maestro ed ispiratore per tanti di noi.
A lui va un commosso ricordo.

1. Introduzione

Ci sono numerosissime ricerche su equazioni di evoluzione degeneri in spazi di Banach e loro applicazioni ed equazioni alle derivate parziali. Due diversi approcci furono proposti nella monografia di Favini-Yagi [7]. Altri metodi si possono trovare, per esempio, nella monografia di Melnikova e Filinkov [12].

Il primo metodo in [7] é connesso ad operatori lineari multivoci, il secondo con i risolventi modificati e metodi operazionali che estendono la tecnica di Da Prato e Grisvard. Vedi [8] per applicazioni ad equazioni quasi lineari.

In ogni caso, un ruolo fondamentale é giocato dalle stime risolventi.

Varie applicazioni ad equazioni differenziali paraboliche singolari sono state descritte in due lavori di Favini, Lorenzi, Tanabe e Yagi, [5], [6]. In particolare, [6] tratta Direttamente le equazioni del secondo ordine con termini di ordine inferiore.

Fino ad ora, sembra che nessuno rilevante teorema di perturbazione relativo alle tecniche di [7] sia stato ottenuto.

In questo seminario vengono descritti alcuni recentissimi risultati sull'argomento ottenuti in collaborazione con R. Cross e Ya. Yakubov, [2].

Il primo riguarda l'approccio risolvente di perturbare un operatore multivoco con un altro operatore (possibilmente) multivoco. Il secondo é legato al risolvente modificato.

Altri contributi che derivano da tecniche relative ad operatori settoriali sono in preparazione.

2. L'approccio risolvente

In questa sezione viene sostanzialmente esteso al caso multivoco un risultato di [13], pp. 12-13.

A tal fine, si utilizzano vari risultati di Cross [1].

Richiamo soltanto definizioni essenziali.

Se X, Y sono spazi di Banach, $\mathcal{L}(X,Y)$ é lo spazio degli operatori lineari limitati da X a Y. $\mathcal{ML}(X,Y)$ é lo spazio degli operatori multivoci da X a Y.

Se $X=Y$, si pone

$$\mathcal{ML}(X) := \mathcal{ML}(X,X)$$

Se A é multivoco, si definisce la norma di Au come

$$\|Au\|_Y := \inf\{\|y\|_Y,\ y \in Au\}.$$

e se $D(A)=X$,

$$\|A\|_{\mathcal{ML}(X,Y)} := \sup_{\|u\|_X \le 1} \|Au\|_Y$$

Se A_0 denota una selezione (o una parte lineare univalente) di A

$$\Big(A = A_0 + A - A_0,\ D(A_0) = D(A)\Big)$$

allora

$$Au = A_0 u + AO.$$

Definizione 2.1. *Se $A \in \mathcal{ML}(X)$, $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ denota l'insieme risolvente di A:*

$\lambda \in \rho(A)$ se e solo se l'operatore inverso $(\lambda I - A)^{-1}$ é un operatore lineare univalente continuo definito su tutto X.

In tal caso, si pone

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

e lo si chiama il risolvente di A.

Per operatori univalenti, se $D(B) \supseteq D(A)$, per invertire $\lambda I - A - B$, si scrive

$$\lambda I - A - B = \Big(I - B(\lambda I - A)^{-1}\Big)(\lambda I - A).$$

Cosa si puó fare nel caso multivoco?

Si provano i seguenti lemmi.

Lemma 2.1. *Sia* $S \in \mathcal{ML}(X)$, $D(S) = X$ *e* $\|S\| < 1$. *Allora* $I - S$ *ha immagine densa.*

Lemma 2.2. *Sia* $S \in \mathcal{ML}(X)$, $D(S) = X$, $\|S\| < 1$ *e sia* $S(0)$ *chiuso.*
Allora $(I - S)^{-1} \in \mathcal{ML}(X)$ *é continuo se e solo se* $R(I - S)$ *é chiuso.*

Combinando i due lemmi, si arriva alla seguente proposizione

Proposizione 2.1. *Se* $S \in \mathcal{ML}(X)$ *soddisfa* $D(S) = X$, $\|S\| < 1$, $S(0)$ *chiuso, allora* $(I - S)^{-1} \in \mathcal{ML}(X)$ *é definito su tutto* X *ed é continuo.*

Passiamo ai principali teoremi di perturbazione.

Teorema 2.1. *Supponiamo*

(a) $A \in \mathcal{ML}(X)$ *e* $\|R(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|^{-\eta}$
per $\lambda \in \Gamma$ *insieme non limitato di* $\mathbb{C}$, $|\lambda| \to \infty$;

(b) $B \in \mathcal{ML}(X)$, $D(A) \subseteq D(B)$ *e* $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, C(\epsilon) > 0$

$$\|Bu\| \leq \epsilon \|Au\|^{\eta} \|u\|^{1-\eta} + C(\epsilon)\|u\|, \ \forall\ u \in D(A).$$

Allora per ogni $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$, *l'operatore lineare multivoco* $(\lambda I - A - B)^{-1}$ *é definito su tutto* X *e*

$$\|(\lambda I - A - B)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma, |\lambda| \to \infty.$$

Notiamo che le condizioni del TEOREMA 2.1 non garantiscono che $(\lambda I - A - B)^{-1}$ sia univalute (single valued).

Non potremmo cioé affermare che

$$(\lambda I - A - B)^{-1} = R(\lambda, A + B).$$

Affinché ció si verifichi, nel seguito descriviamo alcune condizioni sufficienti.

Teorema 2.2. *Supponiamo*

(a) *$A \in \mathcal{ML}(X)$,*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty,$$

dove $\eta \in (0, 1]$;

(b) *$B \in \mathcal{ML}(X)$, $D(B) \supseteq D(A)$, $B(0)$ é CHIUSO e $\forall \epsilon > 0\ \exists C(\epsilon) > 0$ tale che*

$$\|Bu\| \leq \epsilon \|Au\|^{\eta} \|u\|^{1-\eta} + C(\epsilon)\|u\|. \quad \forall u \in D(A);$$

(c) *per $\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty$, l'operatore*

$$(I - R(\lambda, A)B)^{-1}$$

é single valued.

Allora ogni $\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty$, appartiene a $\rho(A + B)$ e $\|R(\lambda, A + B)\| \leq C|\lambda|^{-\eta}$, $\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty$.

Teorema 2.3. *Supponiamo*

(a) *$A \in \mathcal{ML}(X)$, esista $\eta \in (0, 1]$ tale che*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty;$$

(b) *B é lineare e SINGLE VALUED, $D(B) \supseteq D(A)$ e $\forall \epsilon > 0\ \exists C(\epsilon) > 0$ tale che*

$$\|Bu\| \leq \epsilon \|Au\|^{\eta} \|u\|^{1-\eta} + C(\epsilon)\|u\|. \quad \forall u \in D(A);$$

(c) *esista uno spazio di Banach Z, $D(A) \subset Z \subset D(B)$, tale che per un $\theta \in (0, 1]$*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq C|\lambda|^{-\theta}$$

per $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda|$ sufficientemente grande.

Allora ogni $\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty$, appartiene a $\rho(A + B)$ e $\|R(\lambda, A + B)\| \leq C|\lambda|^{-\eta}$, $\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty$.

Osservazione 2.1. *La stessa conclusione del TEOREMA 2.3 é valida se, invece di (b), si richiede B lineare single-valued. $D(B) \supseteq D(A)$, e per un $\sigma > 0$*

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|^{-\sigma}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty.$$

3. L'approccio del risolvente modificato

Definizione 3.1. *Siano M, L operatori lineari chiusi single-valued nello spazio di Banach X, $D(L) \subseteq D(M)$, $0 \in \rho(L)$. L'insieme*

$$\{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda M - L \text{ ha inverso single-valued e limitato definito su tutto } X\}$$

si chiama l'insieme risolvente M modificato di L e viene denotato con $\rho_M(L)$.

L'operatore limitato $(\lambda M - L)^{-1}$ é detto il risolvente M-modificato di L, o M risolvente di L.

Si ha:

Teorema 3.1. *Supponiamo*

(a) *$M(t)$, $L(t)$ siano operatori lineari chiusi single-valued, $D(L(t)) \subseteq D(M(t))$, $0 \in \rho(L(t))$, ogni $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$, appartiene a $\rho_{M(t)}(L(t))$ e*

$$\|M(t)(\lambda M(t) - L(t))^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty,$$

dove $\eta \in (0,1]$, uniformemente in t, Γ essendo un insieme illimitato di $\mathbb{C}_t$;

(b) *$L_1(t)$ é un operatore lineare chiuso single valued in X, $D(L(t)) \subseteq D(L_1(t))$ e $\forall \epsilon > 0\ \exists C(\epsilon) > 0$ tale che*

$$\|L_1(t)u\| \leq \epsilon \|L(t)u\|^{\eta} \|M(t)u\|^{1-\eta} + C(\epsilon)\|M(t)u\|. \ \ \forall u \in D(L(t)).$$

uniformemente in t.

Allora ogni $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$, appartiene a $\rho_{M(t)}(L_1(t) + L(t))$ e

$$\|M(t)[\lambda M(t) - (L_1(t) + L(t))]^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty,$$

uniformemente in t.

Osservazione 3.1. *La stessa conclusione del TEOREMA 3.1 vale se al posto di (b) si assume $L_1(t)$ é un operatore lineare chiuso in X, $D(L(t)) \subseteq D(L_1(t))$ e per un $\sigma > 0$*

$$\|L_1(t)(\lambda M(t) - L(t))^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\sigma}, \quad \lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \to \infty,$$

uniformemente in t.

Corollario 3.1. *Supponiamo:*

(a) *$M(t)$, $L(t)$ sono operatori lineari chiusi nello spazio di Banach X, dipendenti dal parametro t, $D(L(t)) \subseteq D(M(t))$, ogni $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$ appartiene a $\rho_{M(t)}(L(t))$ e per un $\eta \in (0,1]$,*

$$\|M(t)(\lambda M(t) - L(t))^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma, \ |\lambda| \to \infty,$$

uniformemente in t, Γ essendo un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{C}$;

(b) *$L_1(t)$ é un operatore lineare chiuso in X, $D(L(t)) \subseteq D(L_1(t))$ e per un $\mu \in [0.\eta)$,*

$$\|L_1(t)u\| \leq C(\|L(t)u\|^{\mu}\|M(t)u\|^{1-\mu} + \|M(t)u\|), \quad \forall u \in D(L(t))$$

uniformemente in t.

Allora ogni $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$ appartiene a $\rho_{M(t)}(L(t) + L_1(t))$ e

$$\|M(t)(\lambda M(t) - (L(t) + L_1(t)))^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma, \ |\lambda| \to \infty,$$

uniformemente in t.

Per la prova basta applicare opportunamente la disuguaglianza di Young per ricondursi al TEOREMA 3.1.

4. Applicazioni a PDEs

Esempio 4.1. *Consideriamo il problema nel dominio $[0,1] \times [0,T]$*

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t)\right\} = -\dfrac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \displaystyle\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{N_j} \dfrac{\partial^j v(\varphi_{ji}(x),t)}{\partial x^j} \\ \qquad + \sum_{j=0}^4 \int_0^1 B_j(x,y)\dfrac{\partial^j v(y,t)}{\partial y^j} dy + f(x,t), & 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ v(0,t) = v(1,t) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t), & 0 < t < T, \\ \left(1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

dove $b_{ji}(x) \in L^2(0,1)$, $\varphi_{ji}(x)$ sono continue da $[0,1]$ in sé, $B_j(x,y)$ sono nuclei tali che $\int_0^1 |B_j(x,y)|^{\sigma} dx \leq C$ per un $\sigma > 1$.

Se si prende $X := L^2(0,1)$,

$$M := I - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$D(M) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$,

$$L := -\frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$D(L) := H^4(0,1;\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0)$ *e*

$$L_1 u := \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=1}^{N_j} b_{ji}(x) u^{(j)}(\varphi_{ji}(x) + \sum_{j=0}^{4} \int_0^1 B_j(x,y) u^{(j)}(y) dy,$$

con $D(L_1) := D(L)$, *usando* [7, Example 3.1, p. 73], [13, Examples 3 and 4, p. 201], [13, Lemma 1.2.8/3], [7, Theorem 3.8] *ed il TEOREMA 3.1 con* $\eta = 1$, *si puó dedurre che per ogni* $f \in C^s([0,T]; L^2(0,1))$, $0 < s \leq 1$, *e ogni* $u_0 \in L^2(0,1)$ *esiste una unica soluzione stretta* $v(x,t)$ *del problema (1) tale che*

$$Mv \in C^1((0,T]; L^2(0,1)), \quad Lv,\ L_1 v \in C((0,T]; L^2(0,1))$$

purché la condizione iniziale $Mv(x,0) = u_0(x)$ *sia intesa nel senso che*

$$\|M(\gamma M - L)^{-1}(Mv(\cdot,t) - u_0(\cdot))\|_{L^2(0,1)} \to 0 \qquad per \ \ t \to 0^+,$$

dove $\gamma > 0$ *é sufficientemente grande.*

Esempio 4.2. *Modifichiamo le condizioni al contorno in (1) e consideriamo il problema*

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t)\right\} = -\dfrac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \displaystyle\sum_{j=0}^{2} b_j(x) \dfrac{\partial^j v(x,t)}{\partial x^j} \\ \qquad + \sum_{j=0}^{2} \int_0^1 B_j(x,y) \dfrac{\partial^j v(y,t)}{\partial y^j} dy + f(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) = v(1,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t), \qquad 0 < t < T, \\ \left(1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,0) = u_0(x), \qquad 0 < x < 1, \end{cases}$$

dove $b_j(x) \in L^\infty(0,1)$, $B_j(x,y) \in L^2((0,1) \times (0,1))$.

Prendiamo $X := L^2(0,1)$,

$$M := I - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$D(M) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$,

$$L := -\frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$D(L) := H^4(0,1;\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0)$ *e*

$$L_1 u := \sum_{j=0}^{2} b_j(x) u^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{2} \int_0^1 B_j(x,y) u^{(j)}(y) dy,$$

con $D(L_1) := D(M)$. *Poiché*

$$\begin{aligned} \|L_1 u\|_{L^2(0,1)} &\leq C\|u\|_{H^2(0,1)} \leq C\|u\|^{\mu}_{H^4(0,1)}\|u\|^{1-\mu}_{H^2(0,1)} \\ &\leq C(\|Lu\|^{\mu}_{L^2(0,1)} + \|u\|^{\mu}_{L^2(0,1)})\|Mu\|^{1-\mu} \\ &\leq C(\|Lu\|^{\mu}_{L^2(0,1)} + \|Mu\|^{\mu}_{L^2(0,1)})\|Mu\|^{1-\mu} \\ &\leq C(\|Lu\|^{\mu}_{L^2(0,1)}\|Mu\|^{1-\mu} + \|Mu\|_{L^2(0,1)}) \end{aligned}$$

si possono utilizzare [7, Example 3.2, p.73], [7, Theorem 3.8] *e il COROLLARIO 3.1 con* $\eta = 1/2$ *e arbitrario* $\mu \in [0, 1/2)$.

Esempio 4.3. *Consideriamo il problema*

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t)\right\} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a(x)\displaystyle\int_0^x (v(s,t) + \dfrac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s^2}) ds \\ \qquad + f(x,t), \qquad\qquad 0 < x < l\pi,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) = v(l\pi, t) = 0, \qquad\qquad 0 < t < T, \\ \left(1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,0) = \left(1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v_0(x), \qquad 0 < x < l\pi, \end{cases}$$

Qui prendiamo $X := C([0, l\pi]);\ u(0) = u(l\pi) = 0)$, l *essendo un intero positivo ed* $a(x)$ *una funzione continua su* $[0, l\pi]$.

Poi $M := I + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $D(M) := C^2([0, l\pi]);\ u(0) = u(l\pi) = u''(0) = u''(l\pi) = 0)$.

Usando [7, Example 3.10, p. 86], *i calcoli corrispondenti a* [7, p. 85], [7, Theorem 3.8] *ed il COROLLARIO 3.1 con* $\eta = 1$ *e* $\mu = 0$, *si puó dedurre che per ogni* $f \in C^s([0,T]; X)$, $0 < s \leq 1$, *e* $v_0 \in D(M)$, *esiste una unica soluzione stretta* $v(x,t)$ *di (3) tale che* $Mv \in C^1((0,T]; X)$,

purché $Mv(x,0) = Mv_0$ *sia inteso nel senso*

$$\|M(\gamma M + I)^{-1} M(v(\cdot,t) - v_0(\cdot))\|_X \to 0, \qquad \textit{per} \ \ t \to 0,$$

con γ *sufficientemente grande.*

Esempio 4.4. *Consideriamo il problema*

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(t^l v(t)) = Lv(t) + L_1 v(t) - av(t) + f(t), \qquad 0 < t < T, \\ \lim_{t\to 0^+}(t^l v(t)) = 0, \end{cases}$$

dove $l > 1$*. Si ha:*

Teorema 4.1. *Supponiamo*

(a) L *é un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach* X*,* $D(L)$ *denso in* X*, l'insieme risolvente* $\rho(L)$ *contiene*

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda \geq -c(1 + |Im\lambda|),\ c > 0\}$$

e per tali λ *riesca*

$$\|R(\lambda, L)\| \leq \frac{c}{|\lambda| + 1}.$$

(b) *Per ogni* $t \in [0, T]$*,* $L_1(t)$ *é un operatore lineare chiuso in* X*,* $D(L) \subseteq D(L_1(t))$*,* $L_1(\cdot) \in C^{1+\mu}([0, T];\ B(D(L), X))$ $\mu = \min\{l - 1,\ 1\}$ *e per ogni* $\epsilon > 0$ $\exists C(\epsilon) > 0$ *tale che*

$$\|L_1(t)u\| \leq \epsilon\|Lu\| + C(\epsilon)\|u\|, \quad \forall u \in D(L)$$

uniformemente in $t \in [0, T]$*.*

(c) $l > 1;\ a = 0$ *se* $L_1(t) \equiv 0$*, altrimenti* $a > 0$ *sufficientemente grande.*

(d) $f \in C^\sigma([0, T]; X)$ *con* $0 < \sigma < \mu(1 - \frac{1}{l})$*.*

Allora (4) ammette una unica soluzione stretta v *tale che* $t^l v \in C^{1+\sigma}([0, T]; X)$ *e* $v \in C^\sigma([0, T]; D(L))$*.*

Inoltre, $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{d}{dt} t^l v(t) = 0$ *e* $Lv(0) + L_1(0)v(0) - av(0) + f(0) = 0$*.*

Osservazione 4.1. *Usando l'esempio 4.1, possiamo prendere* $X = L^2(0, 1)$*,* $L := -\dfrac{d^4}{dx^4}$*,* $D(L) := H^4(0, 1;\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0)$ *e*

$$L_1(t)u := b(t)\left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{N_j} bji(x)u^{(j)}(\varphi_{ji}(x)) + \sum_{J=0}^{4}\int_0^1 B_j(x, y)u^{(j)}(y)dy\right),$$

con $D(L_1(t)) = D(L)$*, dove* $b(t) \in C^{1+\mu}[0, T]$*.*

Gli esempi successivi riguardano problemi del tipo

$$
(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m(x)u(x,t)) + \mathcal{L}u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,\tau], \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau), \\ m(x)u(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}
$$

dove Ω é un dominio limitato in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontiera regolare $\partial\Omega$,

$$
\mathcal{L} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x),
$$

a_{ij}, a_i, a_0 sono funzioni da $\bar{\Omega}$ a $\mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji} \in C(\bar{\Omega})$, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$, a_i, $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\ldots n$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $c_0 > 0$, $a_0(x) \geq c_1 > 0 \forall x \in \bar{\Omega}$, $m \in L^\infty(\Omega)$, $m(x) \geq 0$ su $\bar{\Omega}$. Generalizzando al caso degenre i risultati classici (cfr. H.O. Fattorini [3, Theorem 4.43]), é stato mostrato in [5] che se $D(\mathcal{L}) := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $L = \mathcal{L}$, $a_j \equiv 0$, $D(M) := L^p(\Omega)$, ed $m(\cdot)$ é ρ-regolare nel senso che $m \in C^1(\bar{\Omega})$ e

$$
(6) \qquad |\nabla m(x)| \leq Cm(x)^\rho, \quad x \in \bar{\Omega},
$$

per un $\rho \in (0,1)$, allora per $p \geq 2$ vale la stima

$$
(7) \qquad \|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq C(1+|\lambda|)^{-\dfrac{2}{p(2-\rho)}}
$$

nel settore $\Sigma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda \geq -c(1+|Im\lambda|)\}$, $c > 0$. Recentemente, in [6], é stato trattato il problema generale (5) anche con condizioni al bordo di tipo ROBIN

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + b(x)u(x,t) = 0 \ \text{ su } \ \partial\Omega \times (0,\tau)
$$

$\nu(x) = (\nu_1(x)\ldots\nu_n(x))$ é il vettore unitario normale esterno in x a $\partial\Omega$ e $b \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sotto proprietá addizionali dei coeffcienti, come

$$
a_0(x) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} \geq c_1 \geq 0,
$$

stime del tipo (7) sono state ottenute.

Negli esempi che seguono indichiamo tipi differenti di condizioni sui termini di ordine inferiore che consentono di applicare i risultati di perturbazione delle sezioni 2 e 3.

Esempio 4.5. *In questo esempio vedremo come lavora l'approccio risolvente del* $\oint$ 2. *Consideriamo il problema per una equazione ellittico parabolica*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(m(x)u(x,t)) &= \nabla\cdot(a(x)\nabla u(x,t)) \\ &\quad+\textstyle\sum_{i=1}^n a_i(x)\dfrac{\partial(m(x)u(x,t))}{\partial x_i}+c_0(x)u(x,t)+f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,\tau],\end{aligned} \tag{8}$$

$$u(x,t)=0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\tau], \tag{9}$$

$$m(x)u(x,0)=v_0(x) \qquad x\in\Omega. \tag{10}$$

Qui, Ω *é un dominio limitato di* $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ *di classe* C^2, $m(x)\geq 0$ *su* $\bar\Omega$, $m\in C^2(\bar\Omega)$, $a(x)$, $a_i(x)$, $c_0(x)$ *sono funzioni reali, regolari,* $a(x)\geq\delta>0$ $\forall x\in\bar\Omega$ *per un certo* δ. *In piú, supponiamo* $m(\cdot)$ ρ*-regolare (cfr. (2.6)).*

Sia $X := L^2(\Omega)$, $Mu := mu$, $D(M) := X$, $Lu := \nabla\cdot(a(\cdot)\nabla u)+c_0(\cdot)u$, $D(L) := H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. *Introduciamo la nuova incognita* $v := Mu$ *e in* X *consideriamo gli operatori*

$$A := LM^{-1}, \quad D(A) := M(D(L)),$$
$$B := \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D(B)=H^1(\Omega).$$

Allora il problema (8)-(10) é ridotto al problema di Cauchy multivoco

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}\in Av+Bv+f(t), & t\in(0,\tau],\\ v(0)=v_0\end{cases} \tag{11}$$

dove $f(t) := f(t,\cdot)$ *e* $v_0=v_0(\cdot)$.

Vogliamo usare il TEOREMA 2.3 insieme alla OSSERVAZIONE 2.1. Sappiamo da (7) che

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)}=\|M(\lambda M-L)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq C(1+|\lambda|)^{-\frac{1}{2-\rho}}$$

per ogni $\lambda\in\Sigma_1$. *Dunque, la condizione* (*a*) *nel TEOREMA 2.3 é soddisfatta con* $\eta=\dfrac{1}{2-\rho}$. *Usando argomenti in* [8, pp. 443-444], *introduciamo lo spazio di Hilbert* $Z := H^{\frac{n}{2}+\epsilon}(\Omega)$, $0<\epsilon<1/2$. *Chiaramente,* $Z=[L^2(\Omega),H^2(\Omega)]_{\frac{n}{4}+\frac{\epsilon}{2}}$.

Allora, per interpolazione (vedi [8, p. 144] *per dettagli)*

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X,Z)}=\|M(\lambda M-L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Z)}\leq c(1+|\lambda|)^{\frac{n}{4}+\frac{\epsilon}{2}-\frac{1}{2-\rho}}$$

per ogni $\lambda \in \Sigma_1$. *L'ultimo esponente é negativo per ogni* $\rho \in (0,1)$ *se* $n = 2$, *per* $\rho \in (\frac{2}{3}, 1)$ *se* $n = 3$. *Osserviamo ora che* $Z \subset H^1(\Omega)$ *e* B *é limitato da* $H^1(\Omega)$ *in* $L^2(\Omega)$. *Pertanto, l'operatore* $BR(\lambda, A)$ *soddisfa la stima dell'OSSERVAZIONE 2.1 e* $R(\lambda, A)$ *ha la proprietá (c) del TEOREMA 2.3 con* $\sigma = \theta = \frac{1}{2-\rho} - \frac{n}{4} - \frac{\epsilon}{2}$. *Cosí, per il TEOREMA 2.3,*

$$\|R(\lambda, A+B)\|_{\mathcal{L}(X)} \le c|\lambda|^{-\dfrac{1}{2-\rho}}$$

per ogni $\lambda \in \Sigma_1$, $|\lambda| \to \infty$.

Senza perdita di generalitá possiamo assumere che tale stima é verificata in tutto il settore Σ_1. *Basta infatti operare un cambiamento di variabile* $u = e^{kt}w$ *con* k *abbastanza grande, nel problema (8)-(10). Si applica allora* [7, Theorem 3.7] *con* $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{1}{2-\rho}$, *per concludere che per ogni* $f \in C^\sigma([0,\tau], L^2(\Omega))$, $\dfrac{1-\rho}{2-\rho} < \sigma \le 1$, *e* $v_) \in L^2(\Omega)$, *esiste una unica soluzione stretta* $u(x,t)$ *del problema (11), e perció del problema (8)-(10), cioé* $m(x)u \in C^1((0.\tau]; L^2(\Omega))$, $\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\dfrac{\partial(m(x)u)}{\partial x_i}$ $+c_0(x)u \in C((0.\tau]; L^2(\Omega))$, u *soddisfa (8),(9) e (10) é verificata nel senso che*

$$\|m(L+L_1)^{-1}(mu - v_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \textit{per} \quad t \to 0^+.$$

$L_1 u := \sum_{i=1}^n a_i(\cdot\dfrac{\partial(m(\cdot)u)}{\partial x_i})$, $D(L_1) := H^1(\Omega)$.

Esempio 4.6. *In questo esempio mostriamo come usando nuove stime gradiente possiamo perturbare l'operatore principale dell'equazione. Per tali stime. ricordiamo Lunardi* [11], *Metafune, Vespri, Priola, e menzioniamo per esempio* [10].

Per semplicitá, descriviamo prima il caso $n = 1$. *Consideriamo l'equazione risolvente con condizioni al bordo Dirichelet*

$$\lambda m(x)u(x) - u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{13}$$

Qui, $m \in C^1[0,1]$, $m(x) \ge 0$, $|m'(x)| \le cm(x)^\rho$, $0 < \rho < 1$, $c(\cdot) \ge \delta > 0$ *é misurabile e limitata su* $[0,1]$.

Nello spazio $X := L^2(0,1)$, *sia* $Lu := u'' - c(\cdot)u$, $D(L) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $Mu := m(\cdot)u$, $D(M) := X$.

Moltiplicando (12) per $\bar{u}(x)$ ed integrando l'equazione ottenuta su $(0,1)$, e prendendo parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$(Re\lambda + |Im\lambda|)\|\sqrt{m}u\|_X^2 + \|u'\|_X^2 + \int_0^1 c(x)|u(x)|^2 dx$$

$$= Re\int_0^1 f(x)\bar{u}(x)dx + |Im\int_0^1 f(x)\bar{u}(x)dx|,$$

da cui, mediante disuguaglianze di Poincaré e di Cauchy-Schwarz, esiste $c_0 > 0$

$$\begin{aligned}(Re\lambda &+ |Im\lambda| + c_0)\|\sqrt{m}u\|_X^2 + \frac{1}{2}\|u'\|_X^2 + \int_0^1 c(x)|u(x)|^2 dx \\ &\leq Re\int_0^1 f(x)\bar{u}(x)dx + |Im\int_0^1 f(x)\bar{u}(x)dx| \leq 2|\int_0^1 f(x)\bar{u}(x)dx| \\ &\leq 2\|f\|_X\|u\|_X\end{aligned}$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda + |Im\lambda| + c_0 \geq c_1 > 0$. Per tali λ, $\|u'\|_X^2 \leq 4\|f\|_X\|u\|_X$, $\|u\|_X^2 \leq \frac{2}{\delta}\|f\|_X\|u\|_X$ e cioé $\exists\ c > 0$ tale che

$$\|u\|_X \leq c\|f\|_X, \quad \|u'\|_X \leq c\|f\|_X$$

Moltiplicando (12) per $m(x)\bar{u}(x)$, si ottiene

$$\lambda\|Mu\|_X^2 + \int_0^1 m(x)|u'(x)|^2 dx + \int_0^1 m(x)c(x)|u(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^1 m(x)f(x)\bar{u}(x)dx - \int_0^1 m'u'(x)\bar{u}(x)dx$$

Utilizzando la (6) e la disuguaglianza di Hölder, si vede che

$$\left|\int_0^1 m'(x)u'(x)\bar{u}(x)dx\right| \leq C\|Mu\|_X^{\rho}\|u\|_X^{1-\rho}\|u'\|_X$$

Ma allora

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 m(x)u'(x)dx &\leq |\lambda|\|Mu\|_X^2 + \left|\int_0^1 m(x)f(x)\bar{u}(x)dx\right| \\
&+ \left|\int_0^1 m'(x)u'(x)\bar{u}(x)dx\right| \\
&\leq c|\lambda|^{1-\dfrac{2}{2-\rho}}\|f\|_X^2 + c(1+|\lambda|)^{-\dfrac{1}{2-\rho}}\|f\|_X^2 \\
&+ c(1+|\lambda|)^{-\dfrac{\rho}{2-\rho}}\|f\|_X^{\rho}\|f\|_X^{1-\rho}\|f\|_X \\
&\leq c\Big(|\lambda|^{-\dfrac{\rho}{2-\rho}} + |\lambda|^{-\dfrac{1}{2-\rho}}\Big)\|f\|_X^2
\end{aligned}
$$

Cosí otteniamo la stima gradiente

$$
\Big(\int_0^1 m(x)|u'(x)|^2dx\Big)^{1/2} \leq c|\lambda|^{-\dfrac{\rho}{2(2-\rho)}}\|f\|_X,
$$

$$
\lambda \in \tilde{\Sigma}_1 := \{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda + |Im\lambda| + c_0 \geq \tilde{c}_1 > 0\}
$$

Questo estende il risultato ben noto per il caso regolare [11, Theorem 3.1.3].

L'argomento si generalizza ad un arbitrario dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *con frontiera regolare* $\partial\Omega$ *in forza della formula di Green*

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega m\Delta u\bar{u}dx &= -\int_\Omega \nabla(m\bar{u})\cdot\nabla u dx \\
&= -\int_\Omega m|\nabla u|^2dx - \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial m}{\partial x_j}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx
\end{aligned}
$$

($u = 0$ *su* $\partial\Omega$). *Si ottiene la stima*

$$
\left(\int_\Omega m(x)|\nabla u|^2dx\right)^{1/2} \leq c|\lambda|^{-\dfrac{\rho}{2(2-\rho)}}\|f\|_{L^2(\Omega)}
$$

per $\lambda \in \tilde{\Sigma}_1$, $|\lambda| \to \infty$.

Pertanto, se $m,\ a_i \in C^1(\bar{\Omega})$, *(4.6) é soddisfatta.* $c(\cdot)$ *é una funzione misurabile limitata su* $\bar{\Omega}$, $c(x) \geq \delta > 0$, $f \in C^\sigma([0,\tau]; L^2(\Omega))$, $\frac{1-\rho}{2-\rho} < \sigma \leq 1$, *e* $v_0 \in L^2(\Omega)$, *il problema*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(m(x)u(x,t)) = \Delta u(x,t) + \sqrt{m(x)}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} && \\
&\quad +c(x)u(x,t) + f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,\tau], \\
&u(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau], \\
&m(x)u(x,0) = v_0(x), && x \in \Omega,
\end{aligned}$$

ammette una unica soluzione stretta $u(x,t)$, $m(\cdot)u \in C^1((0,\tau]; L^2(\Omega))$, $(L + L_1)u \in C((0,\tau]; L^2(\Omega))$

$$\|m(L+L_1)^{-1}(mu - v_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \textit{per } t \to 0^+.$$

Basta applicare il TEOREMA 3.1 per $L + L_1$, *dove*

$$\begin{aligned}
&Lu := \Delta u - c(\cdot)u, && D(L) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\
&L_1 u := \sqrt{m(\cdot)}\textstyle\sum_{i=1}^n a_i(\cdot)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, && D(L_1) := H^1(\Omega) \\
&Mu := m(x)u, && D(M) := X = L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

perché la condizione (a) del TEOREMA 3.1 é soddisfatta con $\eta = \frac{1}{2-\rho}$ *e la stima nella OSSERVAZIONE 3.1 é verificata con* $\sigma = \frac{\rho}{2(2-\rho)}$.

Si puó quindi applicare [7, Theorem 3.8].

Esempio 4.7. *In questo ultimo esempio usiamo un risultato di A. Favaron e A. Lorenzi* [4, Theorem 4.4]. *In un domino illimitato* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *con frontiera* $\partial\Omega$ *di classe* C^2, *ed AMMISSIBILE secondo* [4, Definizione 4.1], *consideriamo l'espressione differenziale in forma di divergenza*

$$A(x, D_x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}) - a_0(x),$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in C_b^1(\bar{\Omega})$, $i,j = 1,\dots n$, $a_0 \in C_b(\bar{\Omega})$, $a_0(x) \geq \nu_1 > 0$

$$\nu_2|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu_3|\xi|^2, \quad \forall (x,\xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$$

con $\nu_2,\ \nu_3 > 0$.

$m \in C_b^2(\bar{\Omega})$ *é una funzione non negativa e*

$$|\nabla m(x)| \leq K m(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

$(A(x,D_x),m)$ *viene detta una coppia ammissibile secondo* [4, Definizione 4.2].

Si noti che $m = e^v$, *dove* $v \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ *e* $\sup_{x\in\bar{\Omega}} v(x) < +\infty$, *soddisfa le precedenti assunzioni.*

Nel Teorema 4.4 di [4] *é mostrato che per ogni* $p \in (1,+\infty)$ *esiste* $\omega_p \geq 0$ *tale che se* $\lambda \in \omega_p + \Sigma_1$, *dove* $\Sigma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} :\ Re\lambda \geq -c(1+|Im\lambda|)\}$, $c = 0$, *l'equazione spettrale* $\lambda m(x)u - A(x,D_x)u = f \in L^p(\Omega)$ *ammette una unica soluzione* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *soddisfacente le stime*

$$\|mu\|_{L^p(\Omega)} \leq c|\lambda|^{-\beta}\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|m|\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} \leq c|\lambda|^{-\beta+\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

dove

$$\beta = \begin{cases} 1 & se\ \ p \in (1,2], \\ \dfrac{2}{p} & se\ \ p \in [2,+\infty), \end{cases}$$

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(m(x)u(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\Big) \\ &\qquad + m(x)\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\displaystyle\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + a_0(x)u(x,t) + f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,\tau], \\ &u(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau], \\ &m(x)u(x,t) = v_0(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

dove $a_i \in C_b(\bar{\Omega})$. *Assumiamo* $1 < p < 4$ $(\Rightarrow\ 1 \geq \beta > \frac{1}{2})$. *Sia* $X = L^p(\Omega)$, $D(M) := X$, $Mu := m(\cdot)u$, $D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $Lu := A(x,D_x)u$, $D(L_1) := W^{1,p}(\Omega)$, $L_1 u := m(\cdot)\sum_{i=1}^{n} a_i(\cdot)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Allora le precedenti stime implicano la condizione (a) del TEOREMA 3.1 (con $\eta = \beta$*) e la stima nella OSSERVAZIONE 3.1 (con* $\sigma = \beta - 1/2$*). Perció da* [7, Theorem 3.8] *otteniamo che per ogni* $f \in C^\sigma([0,\tau];L^p(\Omega))$ $1 - \beta < \sigma \leq 1$, $v_0 \in L^p(\Omega)$, *il problema sopra ha una unica soluzione stretta* $u(x,t)$, *cioé* $m(x)u \in C^1((0,\tau];L^p(\Omega))$,

$(L+L_1)u \in C((0,\tau];L^p(\Omega))$, $u(x,t)$ *soddisfa l'equazione e la condizione al bordo, e la condizione iniziale nel senso*

$$\|m(L+L_1)^{-1}(mu - v_0)\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \quad per \quad t \to 0^+.$$

Riferimenti bibliografici

[1] R. Cross, Multivalued Linear Operators, M. Dekker, Inc., 1998.

[2] R. Cross, A. Favini and Ya. Yakubov, Birkhauser volume in honor of Herbert Amann, accepted.

[3] H.O. Fattorini, The Cauchy Problem, Encyclopedia of Mathematics and its Application, Addison Wesley, London, 1983.

[4] A. Favaron, A. Lorenzi, Gradient estimates for solutions of parabolic differential equations degenerating at infinity, Advances Diff. Eqs., (4) 12 (2007), 435-460.

[5] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe and A. Yagi, An L^p-approach to singular linear parabolic equations in bounded domains, Osaka J. Math. 42 (2005), 385-406.

[6] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe and A. Yagi, An L^p-approach to singular linear parabolic equations with lower order terms, Discrete and Continuous Dynamical Systems (4) 22 (2008), 989-1008.

[7] A. Favini, A. Yagi, Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[8] A. Favini, A. Yagi, Quasilinear degenerate evolution equations in Banach spaces, J. Evol. Eqs. 4 (2004), 421-449.

[9] A. Favini, A. Yagi, Multivalued linear operators and degenerate evolution equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 163 (1993) 353-384.

[10] S. Fornaro, G. Metafune and E. Priola, Gradient estimates for Dirichelet parabolic problems in unbounded domains. J. Diff. Eqs. 205 (2004), 329-353.

[11] A. Lunardi, Analytic semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser-Verlay, Boston, 1995.

[12] I. V. Melnikova and A.Filinkov, Abstract Cauchy Problems: Three Approaches, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[13] S. Yakubov and Ya. Yakubov, Differential Operator Equations: Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.